

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Sanitária e Ambiental

GILMAR DE OLIVEIRA GOMES

**MARÉS FLUVIAIS: RESULTADOS DE UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA
ADIMENSIONAL**

Dissertação apresentada à Universidade
Federal de Santa Catarina, para obtenção do
título de Mestre em Engenharia Ambiental.

Orientador: Prof. Eloi Melo Filho, Ph. D

FLORIANÓPOLIS
SC, BRASIL
Dezembro de 2003

MARÉS FLUVIAIS: RESULTADOS DE UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA
ADIMENSIONAL

GILMAR DE OLIVEIRA GOMES

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental da Universidade de Santa Catarina como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

MESTRE EM ENGENHARIA AMBIENTAL

Na área de Uso e Proteção de Ambientes Costeiros

Aprovado por:

Prof. Dr. Eloi Melo Filho (Orientador)

Prof. Dr. Alvaro Toubes Prata

Prof. Dr. Walter Collischonn

Prof. Dr. Davide Franco

FLORIANÓPOLIS

SC, BRASIL

DEZEMBRO DE 2003

OLIVEIRA GOMES, G.

**MARÉS FLUVIAIS: RESULTADOS DE UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA
ADIMENSIONAL**

Florianópolis, 12/2003

xii, 65 p. 27.9cm figuras em cores, (CPGEA/UFSC, Msc., Engenharia Ambiental, 2003).

Dissertação – Universidade Federal de Santa Catarina

1. Marés fluviais. 2. Canais fluviais. 3. Propagação de maré. 4. Solução analítica de equações diferenciais.

I. CPGEA/UFSC II.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE SÍMBOLOS	viii
RESUMO	xi
ABSTRACT	xii
INTRODUÇÃO	01
1 EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT	04
1.1 Sistema natural de coordenadas e hipóteses básicas	04
1.2 Modelo unidimensional	06
1.2.1 Conservação da massa	08
1.2.2 Conservação da quantidade de movimento linear	10
1.2.2.1 Componente do peso na direção x	11
1.2.2.2 Força de pressão na direção x	12
1.2.2.3 Força de resistência na direção x	14
1.3 Caso particular	17
1.3.1 Conservação da massa	17
1.3.2 Conservação da quantidade de movimento linear	18
2 SOLUÇÃO ANALÍTICA ADIMENSIONAL DAS EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT PARA A MARÉ FLUVIAL	21
2.1 Formulação do problema	21
2.2 Adimensionalização das equações	23
2.3 Solução analítica	24
2.3.1 Solução de ordem zero (escoamento permanente uniforme)	25
2.3.2 Solução de primeira ordem (propagação da onda de maré no interior do rio)	26
2.4 Relevância da solução adimensional	34
2.5 Análise dimensional	36
3 APLICAÇÕES	38
3.1 Regime de inércia & regime de atrito	38
3.2 Distância de penetração adimensional	43
3.3 Comprimento de onda da maré fluvial	45
3.4 Distância de penetração normalizada	47

3.5	Velocidade de propagação	49
3.6	Curvas de remanso	53
	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	59
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	61
	APÊNDICE	63

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Vista em corte da seção longitudinal do canal	05
Figura 2	Volume de controle	06
Figura 3	Seção transversal do volume de controle	07
Figura 4	Vista lateral do volume de controle	12
Figura 5	Vista lateral do volume diferencial, de altura dz	13
Figura 6	Representação esquemática do problema estudado	23
Figura 7	Representação do nível de água (adimensional) no regime dominado pela inércia em $\hat{t} = 0$ (a), $\hat{t} = \pi/2$ (b), $\hat{t} = \pi$ (c) e $\hat{t} = 3\pi/2$ (d).	39
Figura 8	Representação da velocidade da corrente do rio (adimensional) no regime dominado pela inércia em $\hat{t} = 0$ (a), $\hat{t} = \pi/2$ (b), $\hat{t} = \pi$ (c) e $\hat{t} = 3\pi/2$ (d)	40
Figura 9	Representação do nível de água (adimensional) no regime dominado pelo atrito em $\hat{t} = 0$ (a), $\hat{t} = \pi/2$ (b), $\hat{t} = \pi$ (c) e $\hat{t} = 3\pi/2$ (d). Vista em corte da seção longitudinal do canal	41
Figura 10	Representação da velocidade da corrente do rio (adimensional) no regime dominado pelo atrito em $\hat{t} = 0$ (a), $\hat{t} = \pi/2$ (b), $\hat{t} = \pi$ (c) e $\hat{t} = 3\pi/2$ (d)	42
Figura 11	Relação entre a distância de penetração adimensional $(\hat{X} = X/\lambda)$ e a variação de M para F_R igual a 0,075 (curva que atinge os maiores valores da distância); 0,10; 0,15; 0,20; 0,25 e 0,3 (curva que atinge os menores valores da distância)	44
Figura 12	Representação da variação de $L_{nor} = L/L_o$ em função de M ($0,12 < M < 3$) e $F_R = 0,075$ (curva que atinge os maiores valores de L_{nor}); 0,10; 0,15; 0,20; 0,25 e 0,3 (curva que atinge os menores valores de L_{nor})	46
Figura 13	Representação da variação de X/L em função de M ($0,12 < M < 3$) e $F_R = 0,075$ (curva que atinge os maiores valores de X/L); 0,10; 0,15; 0,20; 0,25 e 0,3 (curva que atinge os menores valores de X/L).	48

- Figura 14 Relação entre a velocidade da maré fluvial e a velocidade da onda de gravidade em água rasa (C_M/C_{grav}) em função de $\ln(M)$ ($0,003 < M < 14,974$) e $F_R = 0,075$ (curva que atinge os menores valores de C_M/C_{grav}); 0,10; 0,15; 0,20; 0,25 e 0,3 (curva que atinge os maiores valores de C_M/C_{grav}). 50
- Figura 15 Relação entre a velocidade da maré fluvial e a velocidade básica do rio (C_M/u_0) em função de $\ln(M)$ ($0,003 < M < 14,974$) e $F_R = 0,075$ (curva que atinge os menores valores de C_M/u_0); 0,10; 0,15; 0,20; 0,25 e 0,3 (curva que atinge os maiores valores de C_M/u_0) 53
- Figura 16 Relação entre as curvas de remanso M_1 e M_2 (curvas mais externas) e os envelopes de nível de água para $T = 0, 5h$. 56
- Figura 17 Relação entre as curvas de remanso M_1 e M_2 (curvas mais externas) e os envelopes de nível de água para $T = 12,42h$ 57
- Figura 18 Relação entre as curvas de remanso M_1 e M_2 (curvas mais externas) e os envelopes de nível de água para $T = 48h$. 58

LISTA DE SÍMBOLOS

i) Símbolos Latinos

A	Área da seção transversal do canal
a	Amplitude de oscilação da maré na foz
B	Largura do canal
C_f	Coefficiente de Chézy
C_{cin}	Velocidade da onda cinemática
C_{grav}	Velocidade da onda longa
C_M	Velocidade de propagação da onda de maré rio acima
F_R	Número de Froude
FR_x	Resultante das forças de resistência na direção-x
FP_x	Forças de pressão na direção-x
f	Número de onda adimensional
f_r	Parte real de f , responsável pela intensidade do amortecimento da maré
f_i	Parte imaginária de f , comanda a velocidade de propagação da maré
g	Aceleração da gravidade
G_x	Força peso na direção-x
h_o	Altura de água em regime permanente uniforme
h_1	Descreve a estrutura espacial da perturbação da altura de água provocada pela maré
k	Coefficiente de proporcionalidade de Chézy
L	Comprimento de onda da maré fluvial
L_o	Comprimento de onda da onda longa
L_{nor}	Comprimento de onda da maré fluvial normalizado
M	Parâmetro adimensional, indicador do regime em que o escoamento se processa
M_1	Curva de remanso

M_2	Curva de remanso
$O()$	Determina a ordem de grandeza dos termos da expansão
p	Pressão
P	Perímetro molhado
Q	Vazão do canal
q	Vazão por unidade de largura
R_h	Raio hidráulico
$\text{Re}\{ \}$	Representa a parte real da função complexa
s	Frequência da maré
S_o	Declividade do canal
T	Período da maré
\vec{U}	Campo de velocidade
u	Componente estável da velocidade na direção-x (escoamento médio)
u_0	Velocidade média do escoamento em regime permanente uniforme
u_1	Descreve a estrutura espacial da perturbação da corrente da água provocada pela maré
X	Distância de penetração
\hat{X}	Distância de penetração adimensional

ii) Simbolos Gregos

α	Ângulo formado pelo eixo longitudinal do canal e uma linha de referência horizontal
ε	Razão entre a e h_o
η	Posição da superfície livre da água
η_1	Perturbações de primeira ordem
θ	Diferença de fase entre o nível de água e a velocidade da corrente
$\bar{\tau}$	Tensão média em toda a seção transversal
$\hat{\mu}_{11}$	Número complexo
$\hat{\mu}_1(\hat{x})$	Função complexa

RESUMO

O presente trabalho aborda uma versão adimensional das equações de Saint-Venant (1-D) para estudar o fenômeno da **Maré Fluvial**. A adimensionalização das equações de Saint-Venant é feita a partir da introdução de uma escala intrínseca do problema, sem fazer suposições *a priori* sobre o comportamento da onda de maré.

A solução analítica das equações é obtida através do método das perturbações, para uma maré de pequena amplitude mostrando-se depende de três parâmetros adimensionais: (i) ε amplitude de oscilação da maré na foz, (ii) F_R número de Froude e (iii) M um tipo de número de Reynolds, que mede a relação entre forças de inércia e de atrito.

Dois regimes são possíveis para a maré fluvial, identificados em termos do parâmetro M : um regime dominado pelas forças de atrito ($M \ll 1$) e um regime dominado pelas forças de inércia ($M \gg 1$). Sendo assim, é analisado o comportamento da solução adimensional nos dois regimes e a sua relação com a distância de penetração da maré. Também são investigados: o comprimento de onda e a velocidade de propagação da maré fluvial evidenciando a dependência dos parâmetros adimensionais M e F_R .

Entre diversos resultados, a teoria formulada indica que o crescimento da distância de penetração adimensional (relativamente ao comprimento de onda) aumenta à medida que o valor de M aumenta e que a velocidade de propagação da maré fluvial é limitada, no regime de inércia, pela velocidade da onda longa e, no regime de atrito, pela velocidade da onda cinemática.

Finalmente, é investigada uma aproximação para as curvas de remanso do tipo M_1 e M_2 , comprovando a sua validade na estimação dos níveis máximo e mínimo para a altura de água.

ABSTRACT

A non-dimensional approach to study the phenomenon of river tide is presented. The non-dimensionalization of the 1-D Saint-Venant Equations is achieved through the introduction of appropriate scales. In particular, this work makes use of an intrinsic horizontal length scale which makes no a priori assumption about the river tide wave behaviour.

The resulting analytical solution for a small amplitude river tide depends on three non-dimensional parameters: (i) ε tide amplitude to river depth ratio, (ii) F_R Froude number of river flow and (iii) M a type of Reynolds number which measures the relative magnitude of inertia and friction forces.

Two different flow regimes for river tide are identified in terms of M : friction-dominated ($M \ll 1$) and inertia-dominated ($M \gg 1$) regimes. The behaviour of the non-dimensional solution in the different flow regimes is analysed and the relationship between the penetration distance, the wave length and the propagation speed of the river tide and the key non-dimensional parameters are investigated. Amongst other results, the theory indicates that the propagation speed of a river tide is limited in the inertia regime by the classical long wave speed, and in the friction regime, by the speed of a Kinematic wave.

Finally, an approximate expression for backwater profiles of type M_1 and M_2 is investigated.

INTRODUÇÃO

Vários são os exemplos na zona litorânea brasileira, nos quais o trecho final das bacias hidrográficas inclui a região de encontro do rio ou canal fluvial com o mar.

Em geral, os estudos existentes sobre esta região de transição, o estuário, têm como foco os fenômenos hidrodinâmicos relacionados à variação de densidade decorrente da mistura de água doce e salgada. É possível encontrar, na literatura, diversos estudos relativos à penetração da cunha salina no interior do estuário.

Ressalte-se que as ações que o mar pode exercer sobre o rio não se esgotam nesse aspecto. Um campo de estudo, pouco explorado no país, diz respeito ao efeito que as oscilações de nível, impostas pela maré à jusante, podem causar na corrente e no nível do rio, ou seja, a **Maré Fluvial**, tema do presente trabalho.

A maré fluvial pode ser entendida como a penetração da onda de maré através do estuário até o interior do rio, podendo acontecer em qualquer rio que possua conexão com o mar e que atenda às condições propícias para tal.

No Brasil, a manifestação mais difundida do fenômeno é a pororoca, a penetração da onda de maré em rios da Amazônia ou, segundo a literatura inglesa, *tidal bore*.

Apesar de bastante conhecida, a pororoca é uma manifestação rara do fenômeno. A situação mais comum, inclusive na costa brasileira, é aquela na qual a maré provoca perturbações de pequena amplitude no escoamento. É o caso, por exemplo, do rio Itajaí, em Santa Catarina, que serviu de motivação para o presente estudo.

Com base nas pesquisas efetivadas, verificou-se que, comparada a outros fenômenos hidrodinâmicos, a maré fluvial não tem recebido muita atenção por parte dos estudiosos.

Nas décadas de 70 e 80, o tema começou a ser estudado por pesquisadores canadenses, provavelmente por existirem, no Canadá, importantes rios sujeitos a esse tipo de fenômeno, como o São Lourenço.

Salienta-se como contribuição fundamental da escola canadense aquela fornecida por Godin (1985), apresentando uma abordagem teórica sobre o assunto, em

que modelou a maré fluvial como uma onda progressiva que se atenua à medida que se propaga rio acima.

Embora Godin tenha apresentado o fenômeno em um contexto bastante amplo, acabou por obter uma solução aproximada das equações, sob a hipótese de que a força de atrito seria o fator relevante para o caso. Em Vista disso, nesse estudo, buscar-se-á trabalhar com as equações completas afim de obter resultados abrangentes.

Posteriormente, Vongvisessonjai e Rojanakamthorn (1989) estudaram a maré fluvial no rio Chao Phraya, o mais importante da Tailândia, utilizando a técnica das perturbações para resolver as equações governantes do fenômeno, técnica similar à empregada no presente estudo. Em 1999, Godin apresentou uma revisão sobre o mesmo tema.

O Laboratório de Hidráulica Marítima da Universidade Federal de Santa Catarina (Lahimar-UFSC-Brasil) iniciou uma linha de pesquisa sobre **Maré Fluvial**, em 1998, tendo sido publicado um primeiro artigo acerca do fenômeno no mesmo ano (Melo F^o, 1998).

Neste primeiro trabalho, Melo F^o discute, em meio a outras questões, a relação entre as equações Saint-Venant, utilizadas no estudo dos escoamentos em rios e canais fluviais, e as equações de águas rasas, utilizadas em estudos de hidráulica marítima.

Ambas consideram o campo de pressão hidrostático, porém a diferença entre elas deve-se à localização do sistema de coordenadas: Saint-Venant considera o eixo x sobre o leito do canal, portanto inclinado em relação à horizontal, enquanto as equações de águas rasas o consideram na horizontal.

Tendo em vista o interesse em abordar o problema sob o enfoque do rio, Melo F^o & Jorden (1999) utilizaram as equações de Saint-Venant para modelar a maré fluvial. Por esse motivo, seu trabalho diferenciou-se das demais abordagens existentes até o momento, como por exemplo a de Godin (1985).

Colocadas as bases para a abordagem do problema da **Maré Fluvial**, empreendeu-se uma seqüência de estudos sobre o tema. Os trabalhos de Jorden (1998) e Melo F^o & Jorden (1999) apresentam a solução analítica das equações de Saint-Venant e Melo F^o (2002 1^o, 2^o) buscam aprofundar os resultados anteriores, abordando, na primeira parte, a importância dos três parâmetros adimensionais que regulam a solução.

São eles:

1. ε , representa a razão entre a amplitude de maré na foz e a altura da linha de água no rio;
2. F_R , o número de Froude;
3. M , análogo ao número de Reynolds, mede a magnitude das forças de inércia e de atrito no escoamento induzido pela maré.

Na segunda parte do trabalho, Melo F^o (2002 2^o) apresentou exemplos de aplicação dos resultados obtidos, tais como a determinação da distância de penetração da maré fluvial no interior do rio, para o regime dominado pela inércia e para o regime dominado pelo atrito. Melo F^o verificou, ainda, a influência do período da maré fluvial na intensidade de seu amortecimento, determinando limites para a distância de penetração e a velocidade de propagação.

Seguindo tal linha de pesquisa, o trabalho ora desenvolvido visa contribuir para o melhor entendimento dos efeitos que a maré provoca no escoamento do rio, no trecho próximo à foz, considerando as mesmas hipóteses propostas por Melo F^o (1998), tendo em vista a obtenção de uma solução analítica adimensional.

Este trabalho encontra-se estruturado em três capítulos. No capítulo I, foi efetuada uma revisão dos fundamentos teóricos necessários, seguida de uma dedução detalhada das equações adimensionais de Saint-Venant na forma unidimensional, através da observância do efeito das hipóteses básicas na simplificação do problema. No capítulo II, apresenta-se a solução analítica adimensional das equações, utilizando o método das perturbações. No capítulo III, estão expostos alguns resultados que corroboram as conclusões de Melo F^o (2002 1^o, 2^o) assim como as de Godin (1985). Finalmente são apresentadas as conclusões e considerações que recomendam o estudo empreendido como subsídio teórico, devido ao desenvolvimento analítico e adimensional da solução, criando alternativas para futuras abordagens.

Cabe registrar ainda que, para efeito de associação das equações com o capítulo em que se inserem, optou-se por utilizar a numeração seqüencial relativa à seção em que se localizam.

CAPÍTULO I

EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT

No presente capítulo, pretende-se apresentar uma dedução das equações de Saint-Venant unidimensionais (1-D) na forma diferencial, buscando um desenvolvimento mais simplificado e direto do que o utilizado por Jorden (1998), o qual adotou como ponto de partida as equações de Navier-Stokes e a equação da continuidade em três dimensões, para depois obter, através de integração, a forma 1-D de Saint-Venant.

Dessa forma, busca-se enquadrar o problema em uma abordagem contemporânea da Mecânica dos Fluidos. Assim, as equações de Saint-Venant são deduzidas a partir das leis básicas da Mecânica dos Fluidos que governam escoamentos à superfície livre: a conservação da massa e a conservação da quantidade de movimento linear.

1.1 Sistema natural de coordenadas e hipóteses básicas

Inicialmente é importante estabelecer o sentido atribuído no texto à expressão **canal fluvial**. O canal em questão é aquele no qual o escoamento se dá primordialmente pela ação direta da gravidade através da ação da componente do peso da água, na direção do declive, em uma analogia direta com o que acontece nos rios. Dessa forma, o escoamento em um canal fluvial, ao contrário do que ocorre em um canal de maré, caracteriza-se por um único sentido de movimento: montante para jusante.

Portanto, o sistema de coordenadas mais adequado, para determinar as equações de Saint-Venant, deve ter o eixo x sobreposto ao leito do canal, sendo inclinado em relação à horizontal, de forma que a componente da velocidade de maior interesse tenha a mesma direção de x . Por outro lado, se o eixo x fosse colocado na

horizontal, como nas equações de águas rasas, surgiria uma componente vertical da velocidade, causando uma dificuldade extra nas equações.

Então, o sistema de coordenadas utilizado no texto é concebido como natural por usufruir da declividade do próprio canal, uma vez que o eixo x (longitudinal) segue o eixo do canal acompanhando a sua macrotopografia e apresentando uma inclinação α em relação à horizontal. A origem do eixo x é colocada na foz, entendida aqui, como o ponto a partir do qual não se observa inversão de fluxo, admitindo-se que o sentido positivo do eixo seja de montante para jusante, e que o eixo z seja ortogonal a x , como mostra a Figura 1.

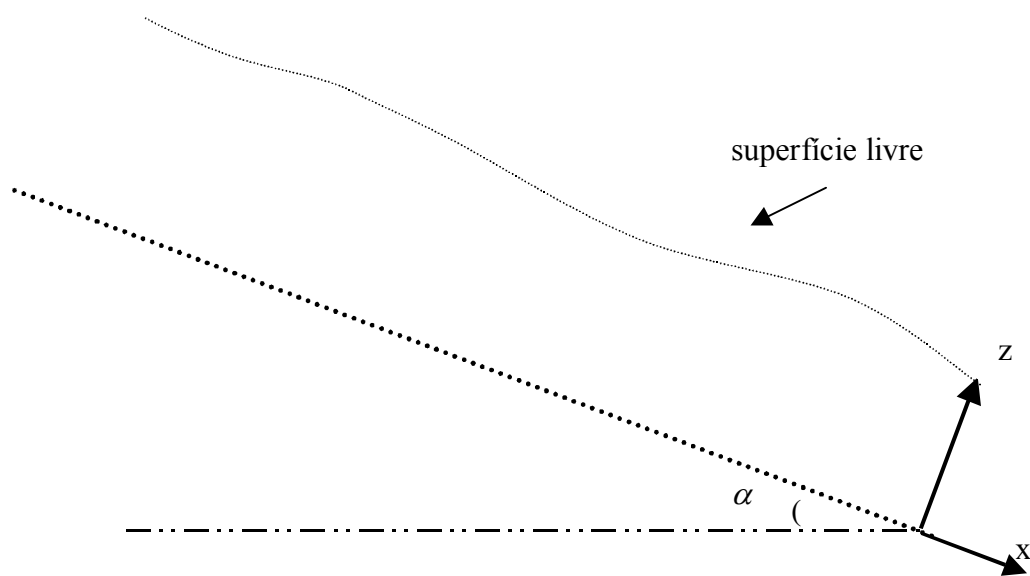


Figura 1: Vista em corte da seção longitudinal do canal.

Tendo sido definidas as características básicas da geometria do problema, o próximo passo consiste em estabelecer as demais hipóteses necessárias à dedução das equações de Saint-Venant, como segue:

- (i) Escoamento isocórico, implicando um valor constante para a densidade, excluindo-se desta análise escoamentos de fluidos estratificados;
- (ii) Campo de pressão hidrostático, uma vez que, no balanço de forças na direção perpendicular ao movimento, as acelerações verticais são desprezíveis em presença da componente do peso, conforme Jansen (1979);

- (iii) Escoamento em alto número de Reynolds, segundo French (1986), caracterizando-o como turbulento;
- (iv) Aproximação de pequeno declive de Morris (1979);
- (v) Declividade constante.

1.2 Modelo unidimensional

A partir das hipóteses estabelecidas no item anterior, é possível deduzir as equações de Saint-Venant na sua forma unidimensional, conforme indica Stoker (1957).

Em coordenadas retangulares, considera-se um volume de controle, no qual o escoamento se processa da seção 1 para a 2, conforme a Figura 2 ilustra.

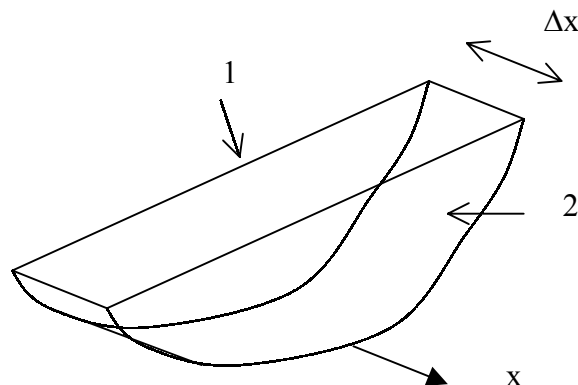


Figura 2: Volume de controle.

Um outro aspecto importante que precisa ser considerado refere-se à área (A) de cada uma das faces do volume de controle. Em cada face, a área depende da altura da linha de água (h), definida como altura hidráulica, tomada perpendicularmente ao eixo do canal. Por sua vez, a altura depende do tempo (t) e da distância (x) como se observa na Figura 3.

O teorema do transporte de Reynolds estabelece uma relação geral entre a taxa de variação de qualquer propriedade extensiva arbitrária (tal como: massa total ou

quantidade de movimento), N , de um sistema, e as variações dessa propriedade associadas a um volume de controle, como se demonstra a seguir:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{SISTEMA}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho dV + \int_{SC} \eta \rho \vec{U} \cdot d\vec{A} \quad (1.1)$$

Nesse caso, η corresponde a uma propriedade intensiva equivalente a N , (ou seja, $\eta = N$ por unidade de massa), ρ à massa específica da água, \vec{U} ao vetor velocidade, $d\vec{A}$ ao vetor de magnitude igual ao elemento de área (dA) da superfície de controle, cuja direção é normal à superfície, para fora do elemento, e dV ao elemento de volume.

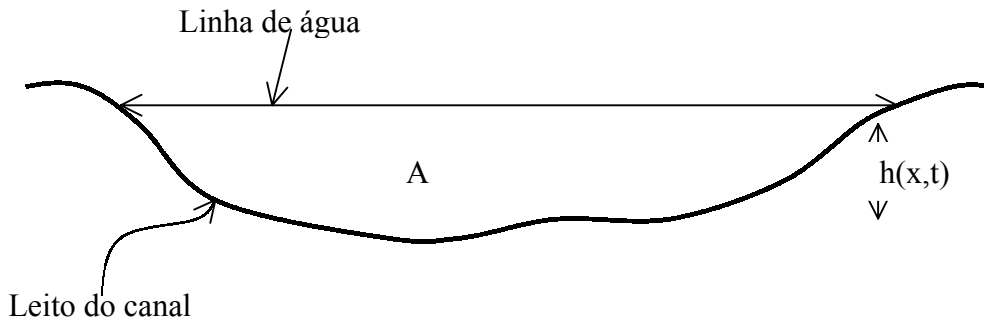


Figura 3: Seção transversal do volume de controle.

A equação 1.1 relaciona a taxa de variação total de qualquer propriedade extensiva arbitrária do sistema $\left(\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{SISTEMA}} \right)$ à taxa de variação da propriedade extensiva arbitrária (N) com o tempo, dentro do volume de controle $\left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho dV \right)$ e a taxa líquida de fluxo da propriedade extensiva (N), saindo pela superfície de controle $\left(\int_{SC} \eta \rho \vec{U} \cdot d\vec{A} \right)$.

Ainda que se trate de um escoamento turbulento, como foi determinado pela hipótese **iii**, é possível, segundo Jansen (1979) e French (1986), estabelecer a velocidade através da composição de uma parte estável (média) e uma perturbação de caráter aleatório (turbulento).

Entretanto, considerando um canal de fraca declividade, conforme estabelece a hipótese **iv**, é possível desprezar a parte aleatória, admitindo apenas a componente média da velocidade, segundo Jansen (1979).

Como consequência, as características do escoamento permitem uma aproximação unidimensional das equações que o determinam. Para tanto, é possível considerar $\vec{U} = u\vec{i}$, na qual u representa uma velocidade média na seção transversal.

1.2.1 Conservação da massa

O princípio da conservação da massa estabelece que a massa num sistema é constante. Assim, fazendo na equação 1.1, $N = M$, sendo M a massa total do sistema, então $\eta = 1$ e, conseqüentemente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{U} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (1.2)$$

Considerando-se ρ uniforme no volume de controle tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \int_{VC} dV \right) + \int_{SC} \rho \vec{U} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (1.3)$$

Pela hipótese **i** de escoamento isocórico e, sabendo que a integral de dV no volume de controle é o próprio volume, decorre que:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \int_{SC} \vec{U} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (1.4)$$

Considerando que o fundo e as paredes são impermeáveis, que não há aporte lateral de água, e que não há fluxo na superfície livre, tem-se:

$$\int_{VC} \vec{U} \cdot d\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} (uA) \Delta x \quad (1.5)$$

Por outro lado, a variação do volume de controle é resultado de uma modificação na área das seções 1 e 2 distantes Δx , durante o intervalo de tempo dt , o que implica:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} \Delta x \quad (1.6)$$

Como a área de uma seção localizada em uma dada posição x , em um instante t , fica completamente determinada pela altura da linha de água $h(x,t)$, tem-se $A(h(x,t))$.

Substituindo as equações 1.5 e 1.6 em 1.4, após manipulações algébricas, constata-se que:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uA) = 0 \quad (1.7)$$

Introduzindo a vazão em volume (Q), através das seções 1 e 2 do volume de controle como indica a Figura 2, obtém-se:

$$Q = uA \quad (1.8)$$

O princípio da conservação da massa (equação 1.7) pode ser re-escrito na forma:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1.9)$$

Sendo assim, o primeiro termo $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)$ representa a taxa de acúmulo de massa no volume de controle, e o segundo termo $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ representa um balanço do fluxo de massa no volume de controle.

1.2.2 Conservação da quantidade de movimento linear

A conservação da quantidade de movimento linear na direção x , aplicada ao teorema do transporte de Reynolds (equação 1.1), é feita admitindo $N = \bar{P}$ (quantidade de movimento do escoamento no volume de controle, na direção x), então $\eta = \bar{U}$. Assim se verifica em:

$$\left. \frac{d\bar{P}}{dt} \right)_{\text{SISTEMA}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \bar{U} \rho dV + \int_{SC} \bar{U} \rho \bar{U} \cdot d\vec{A} \quad (1.10)$$

Admitindo o postulado de Cauchy, o qual afirma que a taxa de variação da quantidade de movimento linear em um volume de controle é igual à resultante das forças que atuam no volume de controle, tem-se:

$$\vec{F} = \left. \frac{d\bar{P}}{dt} \right)_{\text{SISTEMA}} \quad (1.11)$$

Uma vez que a força resultante, na direção x (F_x), inclui as forças de campo (F_{B_x}) e de superfície (F_{S_x}), é possível re-escrever a equação 1.10, na forma:

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \bar{U} \rho dV + \int_{SC} \bar{U} \rho \bar{U} \cdot d\vec{A} \quad (1.12)$$

Já a segunda parcela do lado direito da equação 1.12 pode ser determinada como segue:

$$\int_{SC} \bar{U} \rho \bar{U} \cdot d\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 A) \Delta x \quad (1.13)$$

Também a primeira parcela do lado direito da equação 1.12 pode ser re-escrita como segue:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \bar{U} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u A) \Delta x \quad (1.14)$$

Portanto, substituindo as equações 1.13 e 1.14 em 1.12, resulta:

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \rho \frac{\partial}{\partial t} (u A) \Delta x + \rho \frac{\partial}{\partial x} (u^2 A) \Delta x \quad (1.15)$$

Dividindo a equação 1.15 por V, obtém-se uma expressão para o princípio da conservação da quantidade de movimento por unidade de volume de água:

$$\frac{1}{V} (F_{S_x} + F_{B_x}) = \frac{\rho}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \quad (1.16)$$

Para determinar completamente a equação acima, resta estabelecer as componentes das forças na direção x, atuando no volume de controle. As forças de campo se resumem à componente do peso no sentido do escoamento. As forças de superfície são decorrentes da resultante da força de pressão e da força de atrito nas paredes e no fundo do canal.

1.2.2.1 Componente do peso na direção x

Denotando a componente da aceleração da gravidade na direção x por g_x , e a componente da força peso nessa mesma direção por G_x , é possível escrever:

$$G_x = m g_x \quad (1.17)$$

Seja m a massa da água no volume de controle da Figura 4, onde o eixo z é perpendicular ao eixo x , conforme:

$$m = \rho V = \rho A \Delta x \quad (1.18)$$

Pela hipótese v , a declividade é constante, logo:

$$g_x = g \sin(\alpha) \quad (1.19)$$

Substituindo as equações 1.18 e 1.19 em 1.17, resulta:

$$G_x = \rho g \sin(\alpha) A \Delta x \quad (1.20)$$

Esquematicamente, então, o fenômeno pode ser representado assim:

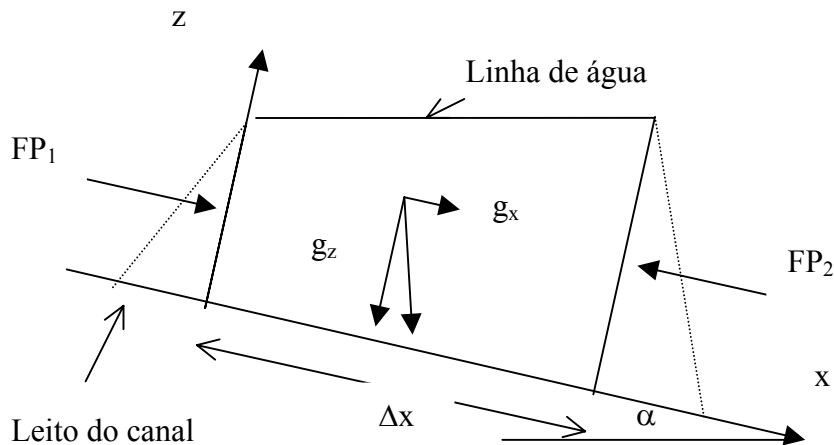


Figura 4: Vista lateral do volume de controle

1.2.2.2 Força de pressão na direção x

Sendo o volume diferencial de altura dz , conforme evidenciado na Figura 5, b representa sua largura.

Pela hipótese **ii**, o campo de pressão é hidrostático. Então, a resultante da força de pressão hidrostática atuando no volume de controle, apresentado na Figura 4, pode ser calculada, como segue:

$$FP_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^h \rho g_z (h-z) b dz \right\} \Delta x + \left\{ \int_0^h \rho g_z (h-z) \frac{\partial b}{\partial x} dz \right\} \Delta x \quad (1.21)$$

Sendo a primeira parcela do lado direito da equação 1.21 a força de pressão proveniente do gradiente de pressão entre as seções 1 e 2, do volume de controle, e a segunda parcela, a força de pressão na direção x, devido à variação da largura b, entre as faces laterais.

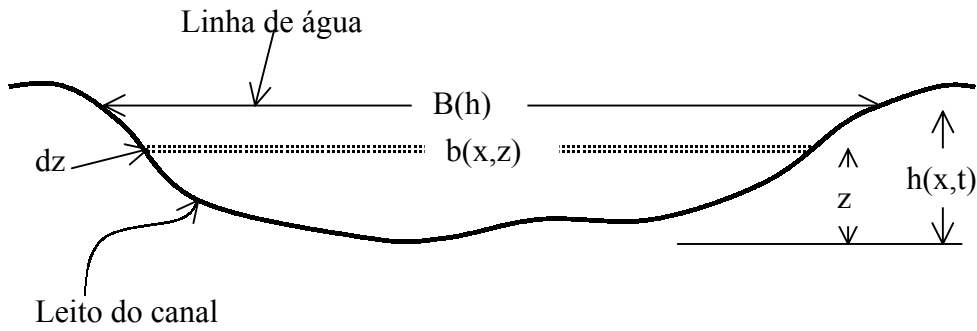


Figura 5: Vista lateral do volume diferencial, de altura dz.

Desenvolvendo a equação 1.21, obtém-se:

$$FP_x = -\left\{ \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} [\rho g_z (h-z)] b dz + \int_0^h \rho g_z (h-z) \frac{\partial b}{\partial x} dz \right\} \Delta x + \left\{ \int_0^h \rho g_z (h-z) \frac{\partial b}{\partial x} dz \right\} \Delta x \quad (1.22)$$

Portanto, simplificando a equação 1.22, obtém-se:

$$FP_x = -\left\{ \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} [\rho g_z (h-z)] b dz \right\} \Delta x \quad (1.23)$$

Visto que $h(x,t)$ e ρ independem da variação de z , desprezando a variação de g_z , ao longo da direção z , a equação 1.23 pode ser re-escrita, como segue:

$$FP_x = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho g_z h) \int_0^h b dz \right\} \Delta x \quad (1.24)$$

em que $A = \int_0^h b dz$. Portanto, a equação 1.24 se transforma em:

$$FP_x = -\rho g_z A \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \quad (1.25)$$

Conforme indica a Figura 4, $g_z = g \cos(\alpha)$. Assim, a equação 1.25 pode ser re-escrita como:

$$FP_x = -\rho g \cos(\alpha) A \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \quad (1.26)$$

1.2.2.3 Força de resistência na direção x

Resta calcular as forças de resistência provenientes do contato da água com o fundo e as paredes do canal, uma vez que a ação do vento na superfície é desprezada. Para tanto, é necessário determinar a tensão de atrito τ que se distribui ao longo de toda a superfície lateral do volume de controle visto na Figura 4.

Expressando a tensão média em toda a seção por $\bar{\tau}$, a força de resistência na direção x pode ser escrita como:

$$FR_x = \bar{\tau} P \Delta x \quad (1.27)$$

sendo que P é o perímetro molhado.

Usando a hipótese **iii** de escoamento turbulento, conclui-se que é válida a parametrização de Chézy para a tensão de atrito média, a qual é determinada em vista da velocidade média na seção, conforme French (1986).

$$\bar{\tau} = -\rho k u |u| \quad (1.28)$$

Sendo k o coeficiente de proporcionalidade de acordo com Chézy, e o sinal negativo, impondo que o sentido seja sempre contrário ao escoamento.

O coeficiente k (adimensional) é calculado por:

$$k = \frac{g}{C_f^2} \quad (1.29)$$

onde g é a aceleração da gravidade, e C_f é o coeficiente dimensional de Chézy, o qual torna-se função das características do fundo do canal.

Nos escoamentos puramente fluviais, o movimento da água se dá sempre em um mesmo sentido, de montante para jusante, portanto é possível re-escrever a equação 1.28, como segue:

$$\bar{\tau} = -\rho k u^2 \quad (1.30)$$

Substituindo a equação 1.30 na 1.27, resulta:

$$FR_x = -\rho k u^2 P \Delta x \quad (1.31)$$

Finalmente é possível re-escrever a equação 1.16, substituindo, no seu lado esquerdo, as equações 1.20, 1.26 e 1.31:

$$\frac{1}{V} \left(\rho g \sin(\alpha) A \Delta x - \rho g \cos(\alpha) A \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x - \rho k u^2 P \Delta x \right) = \frac{\rho}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \quad (1.32)$$

Substituindo a equação 1.8 em 1.32, após manipulações algébricas, resulta:

$$\rho g \sin(\alpha) - \rho g \cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\rho k Q^2 P}{A^3} = \frac{\rho}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \quad (1.33)$$

Invocando a hipótese **iv**, de pequeno declive, tem-se que:

$$\cos(\alpha) \approx 1 \quad (1.34)$$

e

$$\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) = S_o \quad (1.35)$$

Substituindo as equações 1.34 e 1.35 em 1.33, e multiplicando por $\frac{A}{\rho}$, obtém-se:

$$g A S_o - g A \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{k Q^2 P}{A^2} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \quad (1.36)$$

Considere-se o raio hidráulico (R_h), como:

$$R_h = \frac{A}{P} \quad (1.37)$$

A equação 1.36 pode ser re-escrita, substituindo-se a 1.37 :

$$g A S_o - g A \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{k Q^2}{A R_h} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \quad (1.38)$$

Assim, a equação 1.38 representa a conservação da quantidade de movimento, a qual relaciona a aceleração local $\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)$, a aceleração advectiva $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right)$, a força peso por unidade de massa gAS_o , a força de pressão por unidade de massa $gA\frac{\partial h}{\partial x}$ e a força de resistência por unidade de massa $\frac{kQ^2}{AR_h}$.

As equações 1.9 e 1.38 constituem as equações da Saint-Venant, utilizadas para descrever escoamentos em canais fluviais, conforme Jansen (1979).

1.3 Caso particular

Nesta seção será determinada uma forma particular das equações de Saint-Venant, a qual será utilizada no restante do trabalho. Para tanto, faz-se necessário admitir algumas hipóteses adicionais àquelas apresentadas no início da seção 1.1:

- (vi) Largura constante do canal, tornando as equações independentes;
- (vii) Largura muito maior do que a altura da lâmina de água, permitindo desprezar a contribuição de paredes laterais, considerando apenas o atrito existente no fundo, para o cálculo das forças de resistência;
- (viii) Canal retangular.

1.3.1 Conservação da massa

Substituindo a equação 1.8 na equação 1.9, constata-se que:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uA) = 0 \quad (1.39)$$

Admitindo as hipóteses **vi** e **viii**, então $A = Bh(x,t)$, onde (h) é a altura da linha de água e (B) é a largura do canal, a qual constitui-se em um valor fixo. Portanto:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Bh) + \frac{\partial}{\partial x}(uBh) = 0 \quad (1.40)$$

Como B é um valor fixo, tal equação pode ser transformada em:

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + B \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0 \quad (1.41)$$

Dividindo a equação 1.41 por B , resulta:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0 \quad (1.42)$$

1.3.2 Conservação da quantidade de movimento linear

A equação (1.38) da conservação da quantidade de movimento linear na direção x , pode ser re-escrita, multiplicando-a por $\frac{\rho}{A}$, como segue:

$$\rho g S_o - \rho g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\rho k Q^2}{A^2 R_h} = \frac{\rho}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \quad (1.43)$$

Substituindo as equações 1.8 e 1.37 em 1.43, resulta:

$$\rho g S_o - \rho g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\rho k u^2 P}{A} = \frac{\rho}{A} \frac{\partial}{\partial t}(uA) + \frac{\rho}{A} \frac{\partial}{\partial x}(u^2 A) \quad (1.44)$$

Multiplicando a equação 1.44 por $\frac{A}{\rho}$, advém:

$$gAS_o - gA \frac{\partial h}{\partial x} - ku^2P = \frac{\partial}{\partial t}(uA) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2A) \quad (1.45)$$

Se $A = A(x,t)$ e $u = u(x,t)$, então, calculando as derivadas do lado direito de 1.45, resulta:

$$gAS_o - gA \frac{\partial h}{\partial x} - ku^2P = A \frac{\partial u}{\partial t} + uA \frac{\partial u}{\partial x} + \left(u \frac{\partial A}{\partial t} + uA \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial A}{\partial x} \right) \quad (1.46)$$

A partir da equação 1.39, obtém-se:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(uA) \quad (1.47)$$

Substituindo a equação 1.47 na 1.46, encontra-se:

$$gAS_o - gA \frac{\partial h}{\partial x} - ku^2P = A \frac{\partial u}{\partial t} + uA \frac{\partial u}{\partial x} + \left(-u \frac{\partial}{\partial x}(uA) + uA \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial A}{\partial x} \right) \quad (1.48)$$

Calculando a derivada $\frac{\partial}{\partial x}(uA)$, na equação 1.48, verifica-se:

$$gAS_o - gA \frac{\partial h}{\partial x} - ku^2P = A \frac{\partial u}{\partial t} + uA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.49)$$

Dividindo a equação 1.49 por A, obtém-se:

$$gS_o - g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{ku^2P}{A} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.50)$$

Substituindo a equação 1.37 na 1.50, obtém-se:

$$gS_o - g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{ku^2}{R_h} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.51)$$

A hipótese **vii**, implica $R_h \approx h$, então:

$$gS_o - g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{ku^2}{h} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.52)$$

Sendo assim, as equações 1.42 e 1.52, constituem-se na versão unidimensional das equações de Saint-Venant que será utilizada no presente trabalho.

CAPÍTULO II

SOLUÇÃO ANALÍTICA ADIMENSIONAL DAS EQUAÇÕES DE SAINT- VENANT PARA A MARÉ FLUVIAL

Neste capítulo, apresenta-se uma solução analítica das equações de Saint-Venant para o problema da maré fluvial.

Melo e Jorden (1999) obtiveram uma solução para o problema da maré fluvial, a partir da forma dimensional das equações de Saint-Venant. No presente capítulo, o fenômeno da maré fluvial é estudado com base em uma abordagem totalmente adimensional do problema.

2.1 Formulação do problema

A situação será estudada através de um modelo simplificado, porém sem deixar de levar em consideração os aspectos físicos fundamentais do fenômeno. Para tanto, será necessário considerar outras hipóteses como complemento às hipóteses usadas na dedução das equações de Saint-Venant:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) = 0 \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = gS_o - g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{ku^2}{h} \quad (1.52)$$

Sejam as hipóteses:

(ix) A maré provoca perturbações em uma situação de equilíbrio, dada pelo escoamento permanente uniforme subcrítico no rio. Tais perturbações devem ser pequenas de forma

a provocar apenas variações na velocidade da corrente sem, no entanto, ocasionar inversão de fluxo em nenhum local do canal.

Assim, uma pequena oscilação periódica é produzida no nível médio da água na foz, tal que:

$$h(0, t) = h_0 \left[1 + \frac{a}{h_0} \cos(st) \right] \quad (2.1)$$

sendo, a , s e h_0 , respectivamente, a amplitude, a frequência da oscilação e a altura da água para o escoamento básico do rio em regime permanente uniforme, de forma que:

$$\frac{a}{h_0} = \varepsilon \ll 1 \quad (2.2)$$

(x) A maré é representada de forma simplificada por uma única componente harmônica no tempo, com período T , capaz de se propagar rio acima sem sofrer reflexão.

A vazão do rio a montante é considerada constante, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, t)h(x, t) = u_0 h_0 = q \quad (2.3)$$

sendo, u_0 a velocidade média do escoamento básico do rio em regime permanente uniforme, e $q = Q/B$ a vazão por unidade de largura ou vazão específica.

Cabe salientar que, devido à localização dos eixos coordenados, a onda de maré penetrará o canal viajando em um sentido contrário ao sentido positivo do eixo x .

O fenômeno é descrito esquematicamente na Figura 6

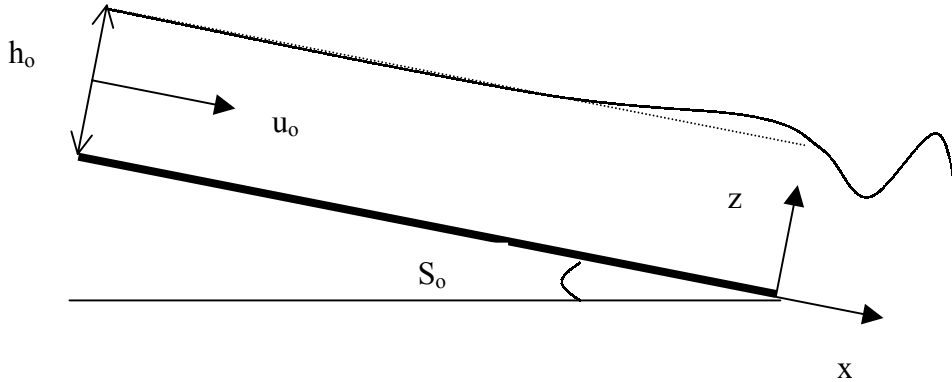


Figura 6: Representação esquemática do problema estudado.

2.2 Adimensionalização das equações

Sob o ponto de vista da utilização, soluções adimensionais são mais abrangentes do que as dimensionais, justamente por apresentarem independência de valores numéricos (dimensionais), possibilitando que tais soluções sejam utilizadas em um espectro maior de situações.

Antes de resolver propriamente as Equações de Saint-Venant 1.42 e 1.52, será feita a adimensionalização.

Em problemas de propagação de ondas, a definição de uma escala de comprimento λ é feita, em geral, considerando o comprimento de onda como, por exemplo, $\lambda = \frac{2\pi\sqrt{gh}}{s}$. Entretanto, não se pretende, no texto, fazer suposições de antemão sobre o comprimento relativo à maré fluvial. Por outro lado, é possível usar uma escala intrínseca definida em termos da velocidade básica do rio (u_0) e da frequência da oscilação de nível $\left(s = \frac{2\pi}{T}\right)$ de período T imposta na foz, como sugere Melo F^o (2002 1^o).

Seja λ definida como segue:

$$\lambda = \frac{u_o}{s} \quad (2.4)$$

Portanto as variáveis adimensionais, são calculadas como segue:

$$\hat{h} = \frac{h}{h_o}; \quad \hat{u} = \frac{u}{u_o}; \quad \hat{x} = \frac{x}{\lambda}; \quad \hat{t} = ts$$

Substituindo as novas variáveis nas equações 1.42 e 1.52, respectivamente, ocorre que:

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{h} \hat{u}) = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} = \frac{g}{u_o s} S_o - F_R^{-2} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} - M^{-1} \frac{\hat{u}^2}{\hat{h}} \quad (2.6)$$

sendo os parâmetros adimensionais: $F_R = \frac{u_o}{\sqrt{gh_o}}$ o número de Froude, relativo ao

escoamento não perturbado e $M = \frac{sh_o}{ku_o}$ o parâmetro, definido por Melo F^o (2002 1^o),

cujo significado físico será explorado mais adiante.

2.3 Solução analítica

Uma solução analítica para o problema proposto será obtida, utilizando a técnica das perturbações de modo a supor que a solução completa para a altura de água $\hat{h}(\hat{x}, \hat{t})$ e para a velocidade da corrente $\hat{u}(\hat{x}, \hat{t})$ do rio seja expressa como a superposição de soluções parciais.

Seja:

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) = 1 + \varepsilon \hat{\eta}_1(\hat{x}, \hat{t}) + O(\varepsilon^2) \quad (2.7)$$

$$\hat{u}(\hat{x}, \hat{t}) = 1 + \varepsilon \hat{u}_1(\hat{x}, \hat{t}) + O(\varepsilon^2) \quad (2.8)$$

sendo $\hat{\eta}_1$ e \hat{u}_1 soluções parciais e ε o parâmetro de ordenamento das soluções parciais, o qual explicita a ordem de grandeza de cada termo da expansão. Portanto $\hat{\eta}_1$ e \hat{u}_1 são soluções de ordem $O(\varepsilon)$.

Substituindo as equações 2.7 e 2.8 em 1.42 e 1.52, resulta:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial (\hat{u}_1 + \hat{\eta}_1)}{\partial \hat{x}} \right) = O(\varepsilon^2) \quad (2.9)$$

$$\varepsilon \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} \right) = \frac{gS_o}{u_o s} - M^{-1} + \varepsilon \left(M^{-1}(\hat{\eta}_1 - 2\hat{u}_1) - F_R^{-2} \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (2.10)$$

em que foi utilizada a expansão binomial $(1 + \varepsilon \hat{\eta}_1)^{-1} = 1 - \varepsilon \hat{\eta}_1 + (\varepsilon \hat{\eta}_1)^2$, admitindo que $|\varepsilon \hat{\eta}_1| < 1$.

2.3.1 Solução de ordem zero (escoamento permanente uniforme)

Embora a equação da conservação da massa (2.9) não introduza nenhuma informação em ordem zero, a partir da equação da conservação da quantidade de movimento (2.10), sucede que:

$$\frac{gS_o}{u_o s} - M^{-1} = 0 \quad (2.11)$$

Então, substituindo a equação 2.3 na 2.11, resultam:

$$h_o = \left[\frac{q}{C_r (S_o)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{2}{3}} \quad (2.12)$$

e

$$u_o = \frac{q}{h_o} \quad (2.13)$$

Ressalte-se que esta última equação corresponde ao caso do escoamento permanente uniforme básico do rio.

2.3.2 Solução de primeira ordem (propagação da onda de maré no interior do rio)

Nesta etapa, é possível observar o efeito da maré fluvial através da resolução do sistema abaixo, obtido a partir das equações 2.9 e 2.10:

$$\frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial (\hat{u}_1 + \hat{\eta}_1)}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} + F_R^{-2} \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} + M^{-1} (2\hat{u}_1 - \hat{\eta}_1) = 0 \quad (2.15)$$

Considerando que a hipótese **x** requer funções periódicas no tempo, é possível admitir que a solução tenha a seguinte forma:

$$\hat{\eta}_1(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{h}_1(\hat{x}) e^{i\hat{t}} \quad (2.16)$$

$$\hat{u}_1(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{\mu}_1(\hat{x}) e^{i\hat{t}} \quad (2.17)$$

sendo que \hat{h}_1 e $\hat{\mu}_1$ descrevem, respectivamente, a estrutura espacial da solução de primeira ordem para o nível da água e a corrente do rio, provocadas pela maré.

Então:

$$\frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{t}} = i \hat{\eta}_1 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{t}} = i \hat{u}_1 \quad (2.19)$$

Substituindo a equação 2.18 na 2.14, resulta:

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} = -i \hat{\eta}_1 - \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} \quad (2.20)$$

Substituindo as equações 2.19 e 2.20 em 2.15, após manipulação algébrica, obtém-se:

$$(F_R^{-2} - 1) \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} - (i + M^{-1}) \hat{\eta}_1 + (i + 2M^{-1}) \hat{u}_1 = 0 \quad (2.21)$$

Admitindo que $\hat{\eta}_1$ seja duas vezes derivável em seu domínio, a equação (2.21) dá origem a:

$$(F_R^{-2} - 1) \frac{\partial^2 \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}^2} - (i + M^{-1}) \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} + (i + 2M^{-1}) \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (2.22)$$

Substituindo a equação 2.20 na 2.22, resulta:

$$(F_R^{-2} - 1) \frac{\partial^2 \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}^2} - (2i + 3M^{-1}) \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} + (1 - 2M^{-1}i) \hat{\eta}_1 = 0 \quad (2.23)$$

Admitindo que a equação 2.16 seja derivável em relação à \hat{x} , obtém-se:

$$\frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} = \frac{d\hat{h}_1}{d\hat{x}} e^{i\hat{t}} \quad (2.24)$$

Admitindo que a equação 2.24, seja novamente derivável em relação à \hat{x} , advém:

$$\frac{\partial^2 \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}^2} = \frac{d^2 \hat{h}_1}{d\hat{x}^2} e^{i\hat{t}} \quad (2.25)$$

Então, substituindo as equações 2.24 e 2.25 na equação 2.23, chega-se à equação ordinária de segunda ordem, linear e homogênea:

$$A \frac{d^2 \hat{h}_1}{d\hat{x}^2} - B \frac{d\hat{h}_1}{d\hat{x}} + C \hat{h}_1 = 0 \quad (2.26)$$

sendo

$$A = F_R^{-2} - 1 \text{ e } A \neq 0,$$

portanto exclui-se da análise o caso do escoamento crítico ($F_R = 1$).

$$B = 2i + 3M^{-1};$$

$$C = 1 - 2M^{-1}i$$

Um aspecto importante a considerar é o fato de que a equação 2.23 é completa, em oposição ao primeiro trabalho referido, de autoria de Godin (1985), o qual optou por estimar numericamente os coeficientes da sua equação, simplificando a análise. Todavia, nesta oportunidade, procura-se desenvolver uma abordagem geral; assim as informações contidas em tais coeficientes são indispensáveis, acredita o autor,

à medida que evidenciam a sua dependência aos parâmetros adimensionais F_R e M , embora gerem dificuldades matemáticas nos cálculos com números complexos.

O desenvolvimento da equação 2.26 será feito através da determinação da equação característica, a qual possui duas raízes complexas. Cabe salientar que será usada somente a positiva, correspondendo ao caso de uma onda, a qual é atenuada à medida que se propaga para montante, conforme indicado por Melo F^o (2002 1º):

$$f = f_r + if_i = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (2.27)$$

sendo f o número de onda adimensional da maré fluvial, equivalente ao número de onda dimensional k , definido por Melo F^o (2002 1º). Neste caso, f_r determina a intensidade do amortecimento, e f_i determina o comprimento de onda $\left(L = \frac{2\pi\lambda}{f_i} \right)$ no interior do rio, conseqüentemente, determina também a velocidade de propagação da maré (C_M), uma vez que:

$$C_M = \frac{L}{T} = \frac{2\pi/T}{2\pi/L} = \frac{s}{\lambda^{-1}f_i} \quad (2.28)$$

Desta forma, a solução da equação 2.26, será:

$$\hat{h}_1(\hat{x}) = c_1 e^{(f_r + if_i)\hat{x}} + c_2 e^{(f_r - if_i)\hat{x}} \quad (2.29)$$

na qual, c_1 e c_2 representam constantes arbitrárias.

Pela hipótese **ix**, e lembrando que se está excluindo da análise o caso da raiz conjugada ($f_r - if_i$) da equação característica relativa à equação 2.26, tem-se:

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 0$$

Portanto, a equação 2.29 reduz-se à equação:

$$\hat{h}_1(\hat{x}) = e^{(f_r + if_i)\hat{x}} \quad (2.30)$$

Basta substituir a equação 2.30 na 2.16, a fim de obter a solução de primeira ordem para a altura de água. Assim :

$$\hat{\eta}_1(\hat{x}, \hat{t}) = e^{f_r \hat{x}} e^{i(f_i \hat{x} + \hat{t})} \quad (2.31)$$

Utilizando a fórmula de Euler para números complexos, sucede que:

$$\hat{\eta}_1(\hat{x}, \hat{t}) = e^{f_r \hat{x}} [\cos(f_i \hat{x} + \hat{t}) + i \sin(f_i \hat{x} + \hat{t})] \quad (2.32)$$

Ressalte-se que o interesse, sob o ponto de vista físico, concentra-se na parte real da solução dada por 2.32. Logo:

$$\hat{\eta}_1(\hat{x}, \hat{t}) = e^{f_r \hat{x}} [\cos(f_i \hat{x} + \hat{t})] \quad (2.33)$$

Para efetivar a solução, calcula-se $\hat{u}_1(\hat{x}, \hat{t})$. Admitindo na equação 2.17:

$$\hat{\mu}_1(\hat{x}) = -\hat{\mu}_{11} e^{(f_r + if_i)\hat{x}} \quad (2.34)$$

na qual, o sinal negativo evidencia o sentido contrário à velocidade da onda de maré. É possível reescrevê-la, como segue:

$$\hat{u}_1(\hat{x}, \hat{t}) = -\hat{\mu}_{11} e^{(f_r + if_i)\hat{x}} e^{i\hat{t}} \quad (2.35)$$

Derivando a equação 2.35 em relação à \hat{x} , resulta:

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} = (f_r + if_i) \hat{u}_1 \quad (2.36)$$

Substituindo a equação 2.36 em 2.20, obtém-se:

$$(f_r + if_i)\hat{u}_1 = -i\hat{\eta}_1 - \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} \quad (2.37)$$

Derivando a equação 2.31 em relação à \hat{x} , decorre:

$$\frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} = (f_r + if_i)\hat{\eta}_1 \quad (2.38)$$

Substituindo-se as equações 2.35 e 2.38 em 2.37, resulta:

$$-\hat{\mu}_{11}e^{(f_r + if_i)\hat{x}}e^{i\hat{t}}(f_r + if_i) = -[i + (f_r + if_i)]\hat{\eta}_1 \quad (2.39)$$

ou ainda:

$$\hat{\mu}_{11}e^{(f_r + if_i)\hat{x}}e^{i\hat{t}}(f_r + if_i) = [i + (f_r + if_i)]\hat{\eta}_1 \quad (2.40)$$

Finalmente, substituindo a equação 2.31 na 2.40, resulta:

$$\hat{\mu}_{11}(f_r + if_i) = i + f_r + if_i \quad (2.41)$$

Como $\hat{\mu}_{11} = u_r + iu_i$ é um número complexo, é possível re-escrever a equação 2.41, como segue:

$$(u_r + iu_i)(f_r + if_i) = f_r + i(1 + f_i) \quad (2.42)$$

Ou seja:

$$(u_r f_r - u_i f_i) + i(u_r f_i + u_i f_r) = f_r + i(1 + f_i) \quad (2.43)$$

Da igualdade dos números complexos, na equação 2.43, encontra-se:

$$u_i = \frac{f_r}{f_i}(u_r - 1) \quad (2.44)$$

Por outro lado, verifica-se:

$$u_r f_i + u_i f_r = 1 + f_i \quad (2.45)$$

Substituindo a equação 2.44 na 2.45, observa-se que:

$$u_r \left(\frac{f_i^2 + f_r^2}{f_i} \right) = 1 + \frac{f_i^2 + f_r^2}{f_i} \quad (2.46)$$

sendo $|f|^2 = f_i^2 = f_r^2$. Então substituindo $|f|^2$ em 2.46, obtém-se:

$$u_r = 1 + \frac{f_i}{|f|^2} \quad (2.47)$$

e, substituindo 2.47 em 2.44, decorre que:

$$u_i = \frac{f_r}{|f|^2} \quad (2.48)$$

Então:

$$\hat{\mu}_{11} = \left(1 + \frac{f_i}{|f|^2} \right) + i \frac{f_r}{|f|^2} \quad (2.49)$$

Finalmente, substituindo a equação 2.49 na 2.35, chega-se à:

$$\hat{u}_1(\hat{x}, \hat{t}) = -\left(1 + \frac{f_i}{|f|^2} + i \frac{f_r}{|f|^2}\right) e^{f_r \hat{x}} e^{i(f_i \hat{x} + \hat{t})} \quad (2.50)$$

Por outro lado, a equação 2.50 pode ser escrita com base na fórmula de Euler, sendo o módulo de $\hat{\mu}_{11}$ correspondente a:

$$D = |\hat{\mu}_{11}| = \sqrt{1 + \left(\frac{1 + 2f_i}{|f|^2}\right)} \quad (2.51)$$

e o argumento de $\hat{\mu}_{11}$ equivalente a:

$$\theta = \arctan\left(\frac{f_r}{|f|^2 + f_i}\right) \quad (2.52)$$

portanto tem-se:

$$\hat{u}_1(\hat{x}, \hat{t}) = -D e^{i\theta} e^{f_r \hat{x}} e^{i(f_i \hat{x} + \hat{t})} \quad (2.53)$$

ou seja:

$$\hat{u}_1(\hat{x}, \hat{t}) = -D e^{f_r \hat{x}} e^{i(f_i \hat{x} + \hat{t} + \theta)} \quad (2.54)$$

Utilizando novamente a fórmula de Euler para números complexos, resulta que:

$$\hat{u}_1(\hat{x}, \hat{t}) = -D e^{f_r \hat{x}} \left[\cos(f_i + \hat{t} + \theta) + i \operatorname{sen}(f_i + \hat{t} + \theta) \right] \quad (2.55)$$

Assim como no caso da elevação do nível da água, o foco de interesse concentra-se, sob o ponto de vista físico, na parte real da solução dada por 2.55.

Logo:

$$\hat{u}_1(\hat{x}, \hat{t}) = -De^{f_r \hat{x}} \cos(f_i \hat{x} + \hat{t} + \theta) \quad (2.56)$$

Enfim, substituindo as equações 2.33 e 2.56, respectivamente, em 2.7 e 2.8, verifica-se que

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) = 1 + \varepsilon e^{f_r \hat{x}} \cos(f_i \hat{x} + \hat{t}) \quad (2.57)$$

$$\hat{u}(\hat{x}, \hat{t}) = 1 - \varepsilon De^{f_r \hat{x}} \cos(f_i \hat{x} + \hat{t} + \theta) \quad (2.58)$$

As equações 2.57 e 2.58 constituem, portanto, a versão adimensional da solução do problema da maré fluvial correta até ordem $O(\varepsilon)$.

2.4 Relevância da solução adimensional

Um aspecto importante da solução adimensional, refere-se à interpretação física do fenômeno. Inicialmente, observa-se que os parâmetros ε , F_R devem admitir valores suficientemente pequenos, a fim de garantir a maré de pequena amplitude em regime subcrítico.

Para tanto, o parâmetro M adimensional pode ser interpretado fisicamente como a razão entre as forças de inércia e atrito, sendo utilizado como um indicador da dinâmica predominante no fenômeno da maré fluvial, conforme registro abaixo:

$$M = \frac{s\hat{u}}{(ku_o \hat{u})/h_o} \quad (2.59)$$

ou seja:

$$M = \frac{h_o s}{ku_o} \equiv \frac{\text{inércia}}{\text{atrito}} \quad (2.60)$$

Assim sendo, M pode ser interpretado como um equivalente ao número de Reynolds, sendo utilizado como indicador do regime em que o escoamento se processa, tendo como divisor de águas o ponto de equilíbrio entre forças de inércia e atrito, ou seja: $M = 1$, como segue:

$M \ll 1$, indica predomínio das forças de atrito;

$M \gg 1$, indica predomínio das forças de inércia.

Cabe verificar, então, em qual regime o fenômeno da maré fluvial se enquadra. Para tanto, foram utilizados valores sugeridos por Melo F^o (2002 1^o), como típicos desta situação na costa catarinense. São eles: $h_o = 5\text{m}$, $u_o = 0,5\text{m/s}$, $k = 0,004$ e $s = 0,00014\text{s}^{-1}$. Substituindo tais valores na equação 2.60, obtém-se $M = 0,35$, indicando que o fenômeno ocorre em um regime intermediário, visto que 0,35 não é um valor muito menor do que um (1), entretanto é inegável a importância das forças de atrito.

O número M pode ser re-escrito, substituindo as equações 2.12 e 2.13 em 2.60, o que resulta:

$$M = \frac{sC_f^{2/3}q^{1/3}}{gS_o^{2/3}} \quad (2.61)$$

ou a equivalente:

$$M = \frac{h_o s C_f^2}{g u_o} \quad (2.62)$$

A equação 2.61 indica que mudanças no regime da maré fluvial, podem ocorrer tendo em vista a variação de diversos fatores. Por exemplo, pode-se verificar um aumento na importância das forças de inércia, na medida em que houver um aumento na frequência (s), desde que os demais parâmetros sejam mantidos fixos.

Cabe observar que a participação das forças de inércia podem:

1. diminuir, na medida em que o período de oscilação aumentar (s diminui);
2. aumentar, na medida em que a vazão específica aumentar;
3. aumentar, na medida em que diminuir a declividade do rio.

2.5 Análise dimensional

Utilizando o teorema dos Π de Buckingham, é possível verificar a compatibilidade da solução apresentada em 2.57 e 2.58 com os princípios fundamentais da análise dimensional.

Analizando o problema sob a ótica dimensional, observa-se que a velocidade e o nível da água devem ser especificados a partir de um grupo de seis parâmetros fundamentais independentes, divididos em três grupos, quais sejam:

1. Rio: q , S_o e C_f ou equivalentemente, u_o , h_o e C_f ;
2. Maré: s e a ;
3. Gravidade: g .

Considerando um conjunto de três dimensões primárias (massa M , comprimento L e tempo T), tal conjunto pode representar dimensionalmente todos os parâmetros fundamentais, como segue:

$$q \propto \frac{[L^2]}{[T]}, \quad S_o \propto \frac{[L]}{[L]}, \quad C_f \propto \frac{[L^{1/2}]}{[T]}, \quad s \propto \frac{1}{[T]}, \quad a \propto [L] \quad \text{e} \quad g \propto \frac{[M]}{[T^2]}$$

Então, de acordo com o teorema dos Π , é possível estabelecer 6-3 grupos adimensionais independentes que devem controlar a solução do problema. Portanto é possível escrever esquematicamente:

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) = \Phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) \quad (2.63)$$

$$\hat{u}(\hat{x}, \hat{t}) = \Omega(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) \quad (2.64)$$

sendo Φ e Ω , funções que determinam a solução do problema.

De fato, a solução adimensional encontrada, indica os seguintes três grupos adimensionais como determinantes da solução:

$$\Pi_1 = \varepsilon = \frac{a}{h_o} ;$$

$$\Pi_2 = F_R = \frac{u_o}{\sqrt{gh_o}} ;$$

$$\Pi_3 = M = \frac{h_o s C_f^2}{g u_o}$$

os quais são obtidos a partir de combinações adimensionais dos seis parâmetros fundamentais.

As funções Φ e Ω , dadas por 2.63 e 2.64, correspondem às equações 2.57 e 2.58, respectivamente.

Confirma-se, dessa forma, a compatibilidade da solução adimensional encontrada com os princípios básicos da análise dimensional.

CAPÍTULO III

APLICAÇÕES

A solução analítica adimensional será utilizada neste capítulo para investigar aspectos que o autor acredita serem relevantes no fenômeno da maré fluvial.

3.1 Regime de inércia & regime de atrito

Será investigado, nessa parte, o comportamento da maré fluvial nos regimes de inércia e de atrito. Em vista disso, foram considerados os mesmos valores típicos para os parâmetros fundamentais dentro da mesma faixa daqueles usados no capítulo anterior, os quais foram sugeridos por Melo F^o (2002 1^o) como representativos para o caso do rio Itajaí, em Santa Catarina.

Assim:

1. $q = 4,6 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$;
2. $S_o = 1/12000 \text{ m}/\text{m}$;
3. $C_f = 30 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, equivalentemente $k = 0,0109$.

Com base nos valores acima, obteve-se $h_o = 6,56 \text{ m}$, $u_o = 0,7 \text{ m}/\text{s}$.

Admitindo, também, que a amplitude da maré seja $a = 0,5\text{m}$, típica da costa de Santa Catarina, calcularam-se os parâmetros adimensionais $\varepsilon = 0,076 \ll 1$ satisfazendo a condição de maré de pequena amplitude e $F_R = 0,0874$, indicando que o escoamento básico do rio se processa em regime subcrítico como requerido pela solução.

A especificação do regime em que o escoamento se processa depende do valor do parâmetro adimensional M , o qual será determinado a partir do valor a ser atribuído ao último parâmetro fundamental ainda não fornecido: o período da maré (T).

Considerando o período de oscilação da maré na foz $T = 0,5h$, tem-se que, $s=0,0035s^{-1}$, o que fornece $M = 2,995$, indicando um regime no qual as forças de inércia predominam ($M \gg 1$). O parâmetro de escala λ , vale neste caso 200m.

A solução adimensional para a posição da superfície da água $\left(\hat{h} = \frac{h}{h_o} \right)$ é mostrada na Figura 7 para quatro fases do período; em $\hat{t} = 0$, $\hat{t} = \pi/2$, $\hat{t} = \pi$ e $\hat{t} = 3\pi/2$, lembrando que $\hat{x} = x/\lambda$ e $\hat{t} = ts$.

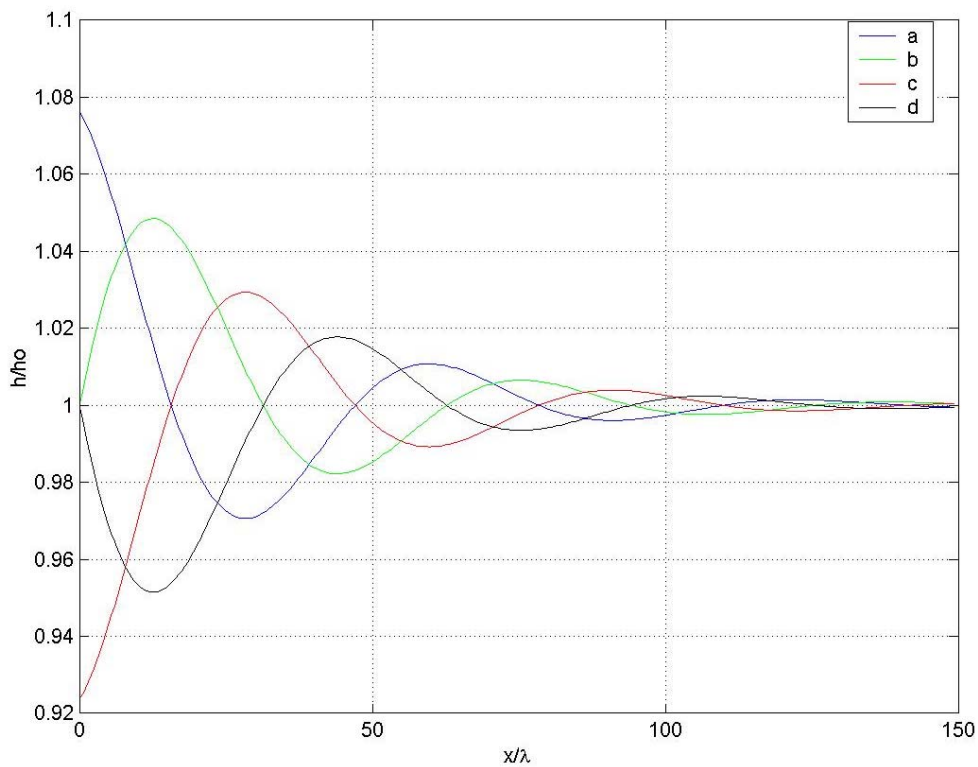


Figura 7: Representa o nível de água (adimensional) no regime dominado pela inércia em $\hat{t} = 0$ (a), $\hat{t} = \pi/2$ (b), $\hat{t} = \pi$ (c) e $\hat{t} = 3\pi/2$ (d).

A Figura 7 mostra que a maré fluvial sofre um forte amortecimento ao penetrar no rio, sendo possível identificar a presença de, pelo menos, duas cristas no interior do canal.

A solução adimensional para a velocidade da corrente do rio $\left(\hat{u} = \frac{u}{u_o}\right)$ é mostrada na Figura 8 para quatro fases do período: em $\hat{t} = 0$, $\hat{t} = \pi/2$, $\hat{t} = \pi$ e $\hat{t} = 3\pi/2$.

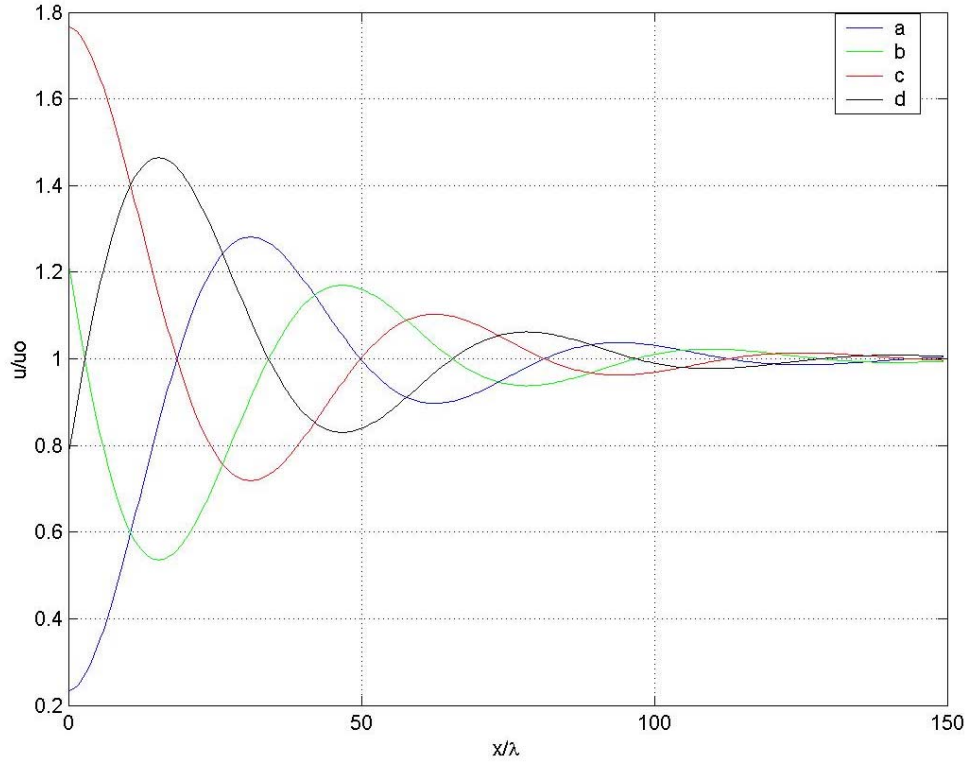


Figura 8: Representa a velocidade da corrente do rio (adimensional) no regime dominado pela inércia em $\hat{t} = 0$ (a), $\hat{t} = \pi/2$ (b), $\hat{t} = \pi$ (c) e $\hat{t} = 3\pi/2$ (d).

Observando as Figuras 7 e 8, é possível notar a diferença de fase (θ), entre \hat{h} e \hat{u} conforme indica a equação 2.58.

Entretanto, cabe analisar o que acontece no regime dominado pelo atrito, inclusive comparando com o caso dominado pela inércia.

Considerando, por outro lado, uma oscilação com $T = 12,42\text{h}$, ou seja, o período da componente lunar semidiurna, tem-se $s = 0,0001405\text{s}^{-1}$ e, conseqüentemente, $M = 0,1206$, fato que caracteriza uma situação na qual as forças de atrito predominam ($M \ll 1$). O parâmetro de escala (λ), nesse caso, vale 4991m.

O fenômeno pode ser observado abaixo, na Figura 9.

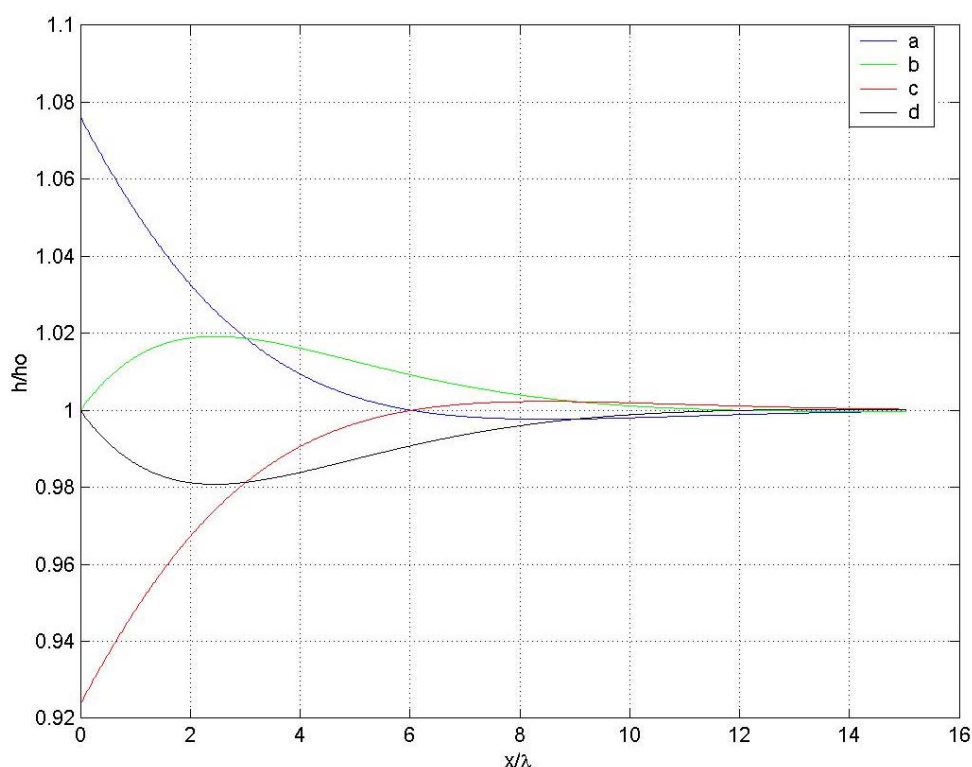


Figura 9: Representa o nível de água (adimensional) no regime dominado pelo atrito em $\hat{t}=0$ (a), $\hat{t}=\pi/2$ (b), $\hat{t}=\pi$ (c) e $\hat{t}=3\pi/2$ (d).

Comparando as Figuras 7 e 9, nota-se que a maré fluvial, no caso do predomínio das forças de atrito (Figura 9), atenua-se mais fortemente, uma vez que a onda quase que desaparece a uma distância aproximada da metade do seu comprimento.

Atente-se para o fato que as oscilações, com períodos na faixa de 0,5h, são muito raras. Então, como sugere Melo F^o (2002-2^o), considerando que os parâmetros acima são representativos da condição do rio Itajaí, a maré fluvial de caráter astronômico aconteceria no regime de atrito nesse rio.

Examine-se, por sua vez, o gráfico da velocidade da corrente no regime de atrito na Figura 10 a seguir:

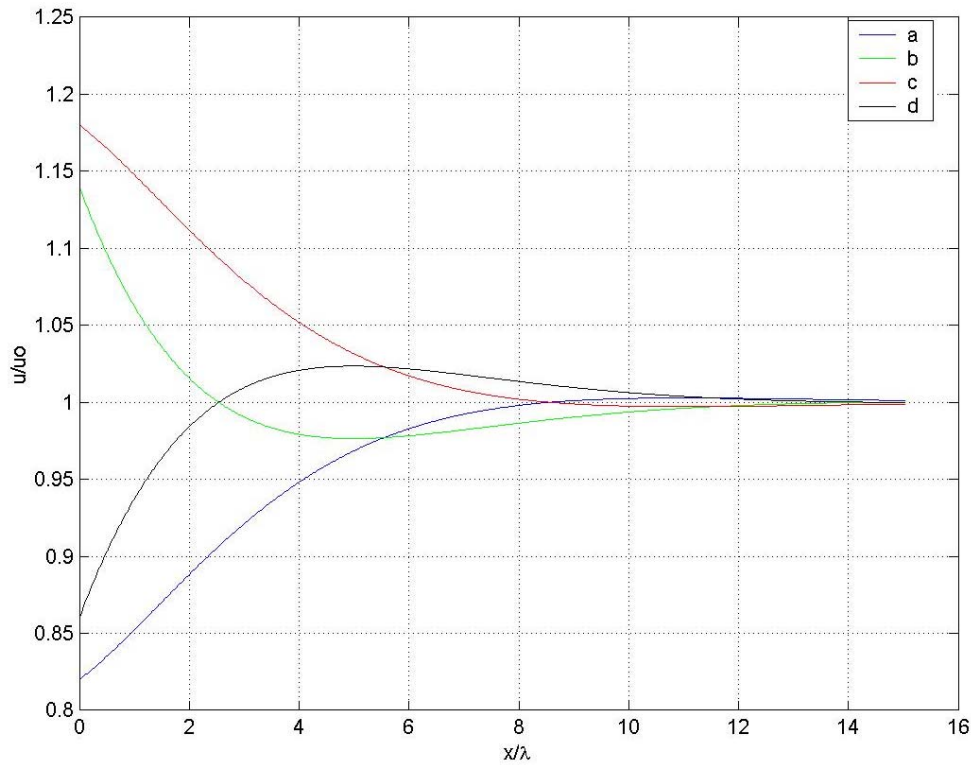


Figura 10: Representa a velocidade da corrente do rio (adimensional) no regime dominado pelo atrito em

$$\hat{t} = 0 \text{ (a)}, \hat{t} = \pi/2 \text{ (b)}, \hat{t} = \pi \text{ (c)} \text{ e } \hat{t} = 3\pi/2 \text{ (d)}.$$

Observando as Figuras 9 e 10 é possível notar a diferença de fase (θ), entre \hat{h} e \hat{u} , conforme indica a equação 2.58, assim como ocorreu no caso dominado pelas forças de inércia.

Comparando a Figura 10, com a sua equivalente, no caso do regime dominado pela forças de inércia (Figura 8), verifica-se que a velocidade da corrente é afetada pela maior ou menor participação das forças de atrito, ou seja, uma diminuição na participação das forças de atrito causou um aumento na velocidade. Esse aumento é atribuído à intensificação do gradiente de pressão na direção x , atuante no escoamento, o qual decorre do aumento da declividade da superfície da água, causada pela onda, conforme Melo F^o (2002-2^o).

3.2 Distância de penetração adimensional

Uma das aplicações mais úteis da teoria em pauta refere-se à previsão da distância de penetração a partir da foz, até onde a maré será perceptível no rio.

Melo & Jorden (1999) propuseram uma forma de quantificar a distância de penetração (X), como sendo a distância para a qual a amplitude da oscilação do nível de água corresponde a 1% da amplitude existente na foz. Os resultados apresentados pelos autores mencionados consistiam em um medida dimensional que quantificava a intensidade do decaimento da maré em unidade de distância (km). Infere-se então que é possível obter a sua equivalente adimensional (\hat{X}), aplicando-se a mesma definição:

$$e^{f_r \hat{X}} = 0,01 \quad (3.1)$$

Ou seja:

$$\hat{X} = \frac{X}{\lambda} = -\ln(0,01) \frac{1}{f_r} \quad (3.2)$$

sendo o sinal negativo necessário para tornar a distância de penetração adimensional uma medida positiva.

Dessa forma, constata-se que a distância de penetração adimensional depende única e exclusivamente do número f_r o qual, por sua vez, depende apenas de M e F_R , conforme indica a equação 2.27, do que se deduz então:

$$\hat{X} = \hat{X}(F_R, M) \quad (3.3)$$

Portanto, considerando valores de F_R em uma faixa característica de escoamentos subcríticos e admitindo T entre 0,5h e 12,42h, cobrindo assim o fenômeno em estudo, de maneira equivalente, M situar-se-á entre 0,12 e 3.

Então, pode-se verificar que o crescimento da distância de penetração adimensional é diretamente proporcional ao crescimento de M , como mostra a Figura 11.

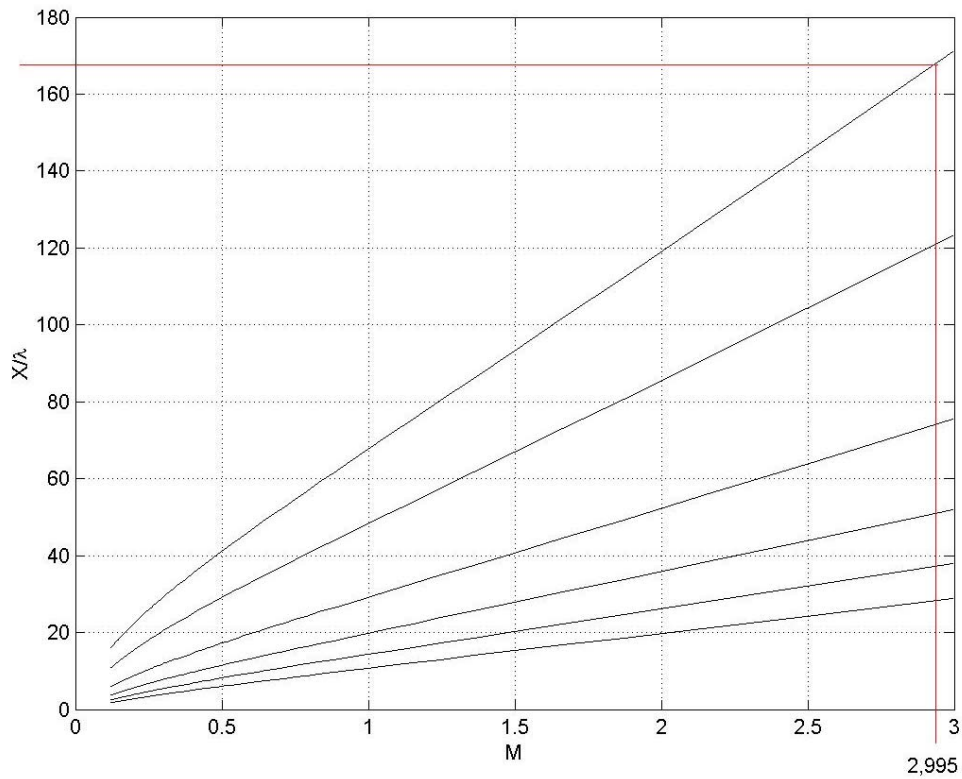


Figura 11: Relaciona a distância de penetração adimensional ($\hat{X} = X/\lambda$) com a variação de M para F_R igual a 0,075 (curva que atinge os maiores valores da distância); 0,10; 0,15; 0,20; 0,25 e 0,3 (curva que atinge os menores valores da distância).

Na Figura 11, é possível fazer uma estimação gráfica da distância de penetração da maré em um determinado rio. Por exemplo, considerando o rio de que se faz o estudo neste trabalho: $q = 4.6 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, $S_0 = 1/12000 \text{ m}/\text{m}$, $C_f = 30 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, $h_0 = 6,56 \text{ m}$ e $u_0 = 0,7 \text{ m}/\text{s}$, então $F_R = 0,075$, $M = 2,995$ e $\lambda = 200\text{m}$.

Sendo assim, é pertinente estabelecer o seguinte procedimento:

- 1 Traçar uma reta vertical no valor de M calculado (2,995);

- 2 Determinar o ponto de encontro da reta traçada no passo anterior com a curva para a qual F_R foi previamente calculado (0,075);
- 3 Traçar uma reta horizontal, a partir do ponto determinado no passo anterior;
- 4 Determinar no eixo vertical, o ponto de interseção deste com a reta traçada no passo anterior (aproximadamente 170);
- 5 Calcular X , através da fórmula $X = \hat{X} \cdot \lambda$ (34000m).

Convém salientar que para o exemplo considerado, a distância de penetração é bastante significativa.

3.3 Comprimento de onda da maré fluvial

Outro aspecto a ser examinado na presente teoria, refere-se à determinação do comprimento de onda da maré fluvial (L). Considere-se que o comprimento de onda dimensional é determinado por f_i (a parte imaginária do número de onda), como segue:

$$L = \frac{2\pi\lambda}{f_i} \quad (3.4)$$

Então:

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{2\pi}{f_i} \quad (3.5)$$

Verifique-se que é mais conveniente, ao invés da adimensionalização do comprimento de onda (equação 3.5), utilizar a versão normalizado pelo comprimento da onda longa (L_o), dado por:

$$L_o = \frac{2\pi}{s} \sqrt{gh_o} \quad (3.6)$$

Dividindo a equação 3.4 pela equação 3.6, obtém-se a expressão para o comprimento de onda da maré fluvial normalizado:

$$L_{\text{nor}} = \frac{L}{L_o} = \frac{F_R}{f_i} \quad (3.7)$$

Portanto, L_{nor} é função dos parâmetros adimensionais F_R e M , ou seja:

$$L_{\text{nor}} = L_{\text{nor}}(F_R, M) \quad (3.8)$$

Dessa forma, é possível observar a variação de L_{nor} em função M na faixa de 0,12 a 3, quando F_R assumir os seguintes valores: 0,075; 0,10; 0,15; 0,20; 0,25 e 0,3.

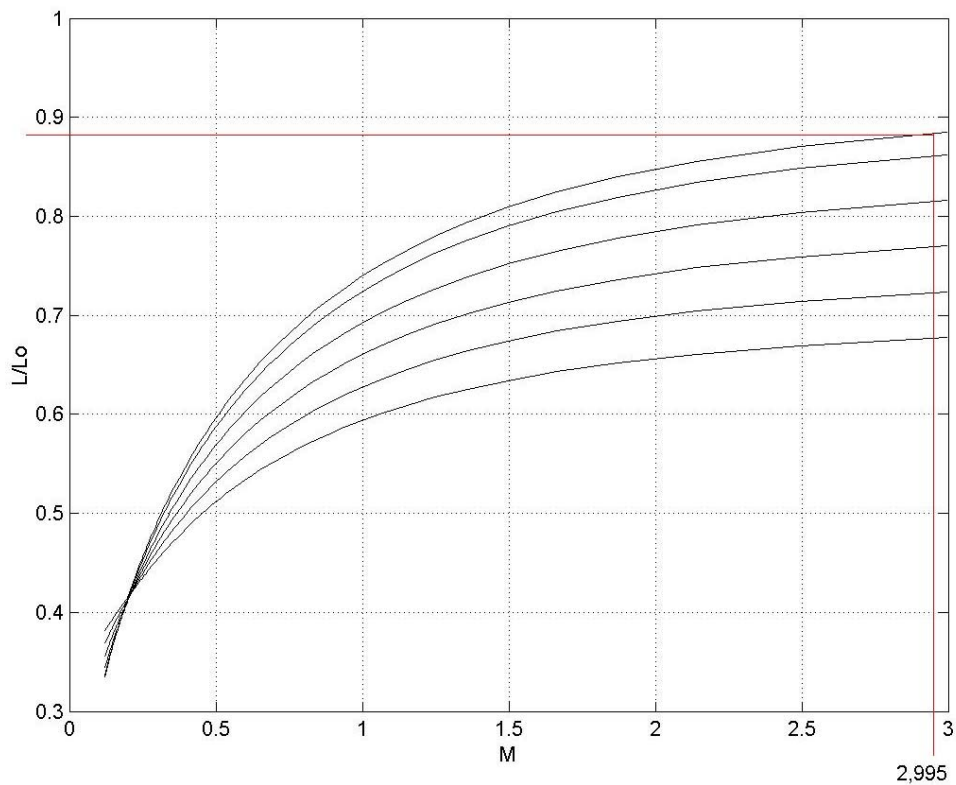


Figura 12: Representa a variação de $L_{\text{nor}} = L/L_o$ em função de M ($0,12 < M < 3$) e $F_R = 0,075$ (curva que atinge os maiores valores de L_{nor}); 0,10; 0,15; 0,20; 0,25 e 0,3 (curva que atinge os menores valores de L_{nor}).

A Figura 12 mostra que o comprimento de onda da maré fluvial pouco difere do comprimento de onda da onda tida como clássica, dependendo do regime de escoamento. De fato, L aproxima-se de L_o à medida que as forças de inércia dominam o escoamento ($M \gg 1$). Faz-se necessário esclarecer que, para o regime típico da maré fluvial, os resultados mostram que $L < L_o$.

Assim como foi feito com a distância de penetração, é possível estimar graficamente o comprimento de onda da maré fluvial, utilizando-se para isso o que informa a Figura 12.

Por exemplo, considerando os mesmos valores dos parâmetros utilizados para a estimação da distância de penetração, é possível estabelecer o seguinte procedimento:

- 1 Traçar uma reta vertical no valor de M calculado (2,995);
- 2 Determinar o ponto de encontro da reta traçada no passo anterior com a curva para a qual F_R foi previamente calculado (0,075);
- 3 Traçar uma reta horizontal, a partir do ponto determinado no passo anterior;
- 4 Determinar, no eixo vertical, o ponto de interseção deste com a reta traçada no passo anterior (aproximadamente 0,88);
- 5 Calcular L , através da fórmula $L = L_{nor} L_o$ (12670m)

Os cálculos acima evidenciam a presença de duas cristas no interior do rio, conforme era esperado.

3.4 Distância de penetração normalizada

Nesta etapa, já é possível determinar a distância de penetração adimensional normalizada pelo comprimento de onda (L). Dividindo a equação 3.2 pela equação 3.5, resulta:

$$\frac{X}{L} = -\frac{\ln(0,01)}{2\pi} \cdot \frac{f_i}{f_r} \quad (3.9)$$

E, uma vez que f_i e f_r dependem de F_R e M , constata-se:

$$\frac{X}{L} = \frac{X}{L}(F_R, M) \quad (3.10)$$

A seguir, a Figura 13 mostra a função dada em 3.10, para o mesmo espectro de valores de M e F_R utilizados até então.

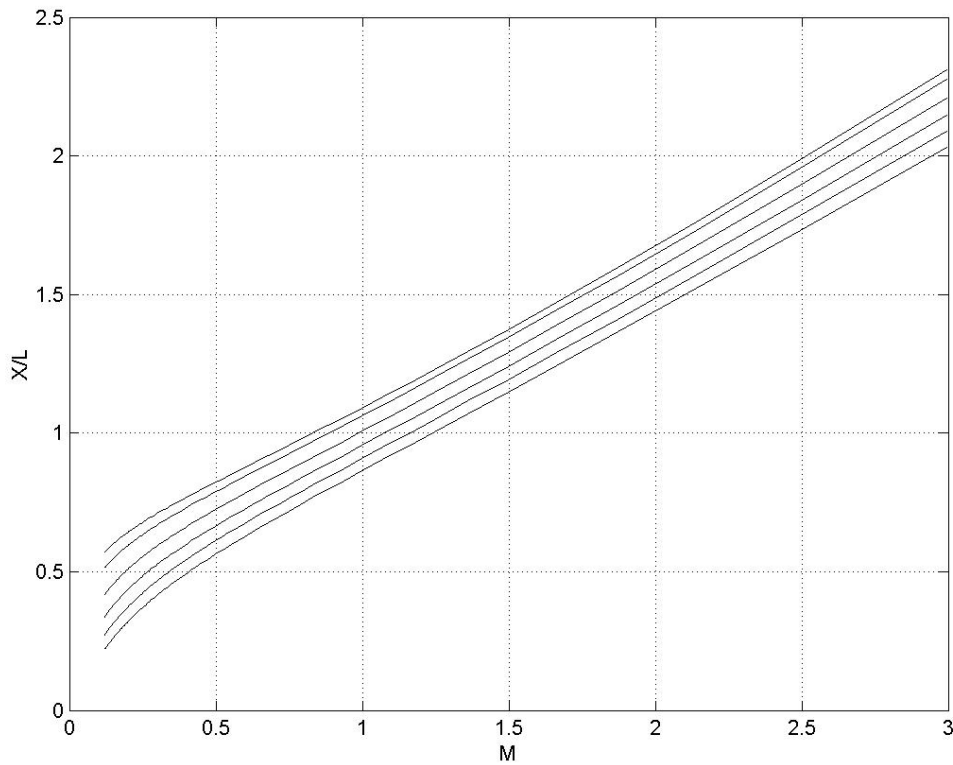


Figura 13: Representa a variação de X/L em função de M ($0,12 < M < 3$) e $F_R = 0,075$ (curva que atinge os maiores valores de X/L); 0,10; 0,15; 0,20; 0,25 e 0,3 (curva que atinge os menores valores de X/L).

Analisando a Figura 13, infere-se que, para a faixa de valores de M , segundo os quais as forças de inércia e de atrito são da mesma ordem de grandeza, tem-se $X/L \approx 1$, o que indica a maré fluvial estar sofrendo uma atenuação aproximadamente de 100%, na distância de um (1) comprimento de onda quando $M \approx 1$. Conseqüentemente, como $M = 1$ representa o ponto de separação entre o regime dominado pela inércia e o regime dominado pelo atrito, verifica-se que, no regime

dominado pela inércia, X será sempre maior do que L , sendo possível identificar mais de uma crista de onda no interior do rio, enquanto que, no regime dominado pelo atrito isso nunca acontecerá. Aliás, tal aspecto já podia ser observado nas Figuras 7 e 9.

3.5 Velocidade de propagação

A velocidade de propagação de uma onda é obtida através da equação que relaciona o seu número de onda com a frequência, a chamada “relação de dispersão”. No caso da maré fluvial, a velocidade de propagação é calculada pela equação 2.28, ou seja:

$$C_M = \frac{s}{\lambda^{-1} f_i} \quad (2.28)$$

Utilizando a definição de λ , dada no capítulo anterior, é possível reescrever 2.28, como segue:

$$C_M = \frac{u_o}{f_i} \quad (3.11)$$

Para melhor interpretar este resultado, é interessante comparar C_M com a velocidade C_{grav} de uma onda longa em um canal horizontal com atrito desprezível, sujeito a uma corrente constante de velocidade u_o de sentido contrário ao da onda.

Seja:

$$C_{\text{grav}} = \sqrt{gh_o} - u_o \quad (3.12)$$

Assim, dividindo a equação 3.11 por 3.12, resulta:

$$\frac{C_M}{C_{\text{grav}}} = \frac{F_R}{f_i(1 - F_R)} \quad (3.13)$$

lembrando que $F_R = \frac{u_o}{\sqrt{gh_o}}$.

Logo, normalizando C_M por C_{grav} , obtém-se uma expressão que depende somente dos parâmetros F_R e M :

$$\frac{C_M}{C_{grav}} = \frac{C_M}{C_{grav}}(F_R, M) \quad (3.14)$$

A partir da equação 3.13, é possível obter a Figura 14.

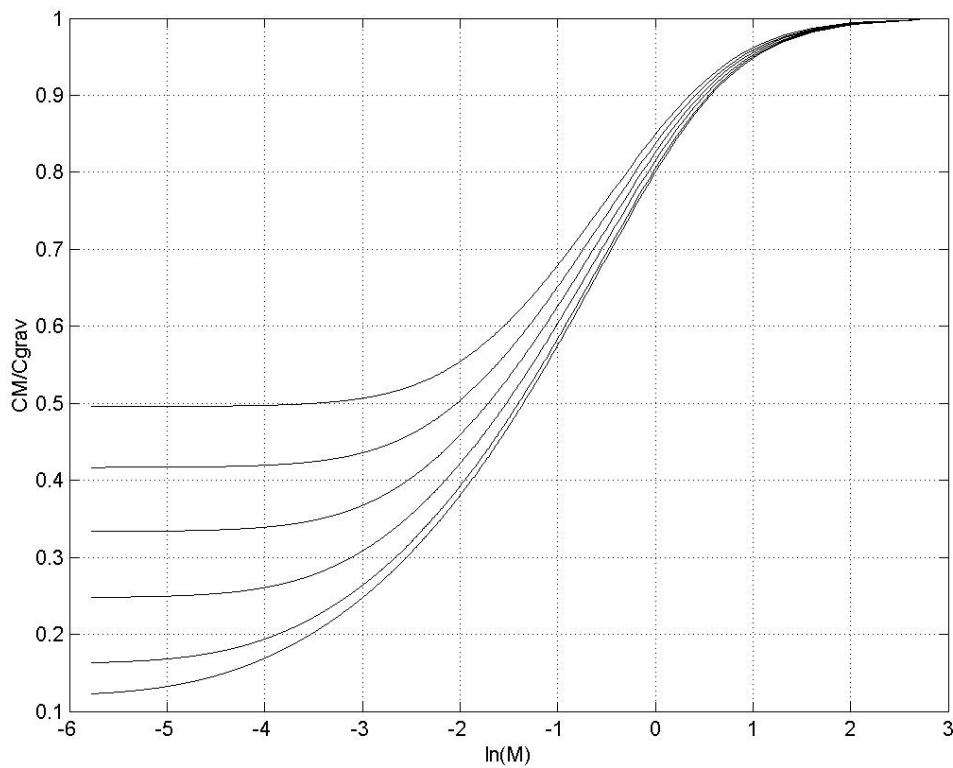


Figura 14: Relaciona a velocidade da maré fluvial e a velocidade da onda de gravidade em água rasa (C_M/C_{grav}) em função de $\ln(M)$ ($0,003 < M < 14,974$) e $F_R = 0,075$ (curva que atinge os menores valores de C_M/C_{grav}); 0,10; 0,15; 0,20; 0,25 e 0,3 (curva que atinge os maiores valores de C_M/C_{grav}).

Na Figura 14 foram utilizando os mesmos valores de F_R , até então considerados, porém admitindo uma faixa maior para os valores de M , a fim de ajudar na compreensão dos resultados. A faixa de valores considerados para M equivale a admitir $0,1h < T < 480h$. Utilizou-se $\ln(M)$ ao invés do próprio M , para facilitar a

interpretação. Convém lembrar que $\ln(M)$ é uma função crescente, portanto, um aumento nos valores de M acarreta aumento em $\ln(M)$.

A Figura 14 indica que a maré fluvial tende a ser significativamente mais lenta que a onda gravitacional, no regime de atrito, enquanto que no regime de inércia as velocidades tendem a se igualar.

Este resultado comprova o caráter dispersivo da maré fluvial observado primeiramente por Godin (1985). A dependência da velocidade da maré fluvial (C_M) com a frequência (s) (fato que caracteriza uma onda dispersiva) pode ser notada na Figura 14, lembrando (como visto no capítulo anterior) que $M \left(M = \frac{sh_o}{ku_o} \right)$ é diretamente proporcional a s , ou seja, ondas de frequência mais baixa, propagam-se mais lentamente que ondas de frequência mais alta, contrariamente ao que se observa para ondas em águas profundas.

O fato de a velocidade da maré fluvial tender assintoticamente para a velocidade de um onda longa, quando predominam as forças de inércia (M e s crescem), pode ser demonstrado analiticamente, levando a equação 3.13 ao limite:

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{C_M}{C_{\text{grav}}} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{F_R}{f_i(1 - F_R)} = \frac{F_R}{(1 - F_R)} \lim_{M \rightarrow +\infty} f_i \quad (3.15)$$

Cabe lembrar que:

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} f_i = \frac{F_R}{(1 - F_R)} \quad (3.16)$$

Portanto, substituindo o resultado dado na equação 3.16 em 3.15, chega-se à:

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{C_M}{C_{\text{grav}}} = 1 \quad (3.17)$$

Considerando o que foi demonstrado até o momento, indaga-se sobre o

que acontece no extremo oposto das curvas $\frac{C_M}{C_{\text{grav}}}$ (na Figura 14), quando $M \ll 1$ e, conseqüentemente, $\ln(M) \ll 0$ (regime dominado pelo atrito). É possível perceber que as curvas tendem a valores fixos que variam conforme o valor de F_R .

Para melhor analisar essa questão, é conveniente utilizar como referência a própria velocidade básica do rio (u_0).

A partir da equação 3.11, é possível escrever:

$$\frac{C_M}{u_0} = \frac{1}{f_i} \quad (3.18)$$

Sendo assim:

$$\frac{C_M}{u_0} = \frac{C_M}{f_i}(F_R, M) \quad (3.19)$$

É interessante observar graficamente a expressão 3.19.

Analisando a Figura 15, conclui-se que a velocidade de propagação da maré fluvial, em um escoamento dominado pelo atrito, tende a um valor mínimo da mesma ordem de grandeza da velocidade básica do rio, dependendo do número de Froude.

Baseado na interpretação da Figura 15, e considerando o resultado obtido na equação 3.17, pode-se concluir que a velocidade de propagação da maré fluvial deve situar-se na seguinte faixa:

$$1,5u_0 < C_M < C_{\text{grav}} \quad (3.20)$$

No entanto, a velocidade $1,5u_0$ corresponde à velocidade de uma onda cinemática (C_{cin}), conforme definida por Melo F^o (1998), que se propaga em um regime dominado pelo atrito.

Assim, a análise efetuada indica que:

$$C_{\text{cin}} < C_M < C_{\text{grav}} \quad (3.21)$$

Cabe ressaltar que a presente constatação somente é válida para os valores dos parâmetros admitidos neste trabalho, todavia como se acredita que tais parâmetros estão dentro de uma faixa aceitável para a costa catarinense, as conclusões obtidas correspondem ao propósito do estudo implementado.

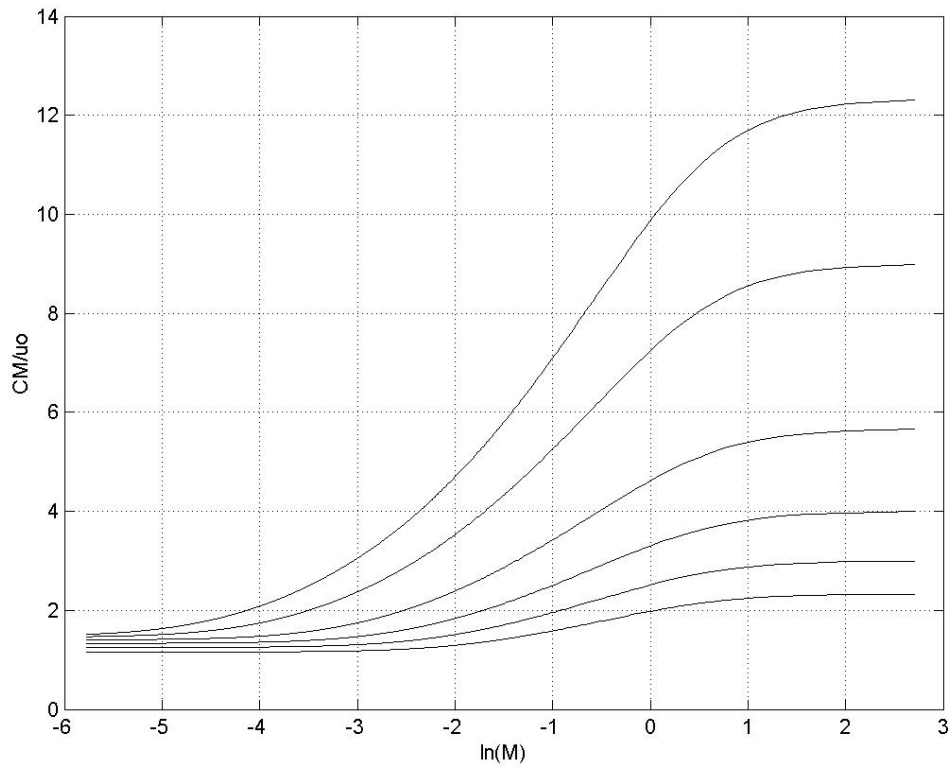


Figura 15: Relaciona a velocidade da maré fluvial e a velocidade básica do rio (C_M/u_0) em função de $\ln(M)$ ($0,003 < M < 14,974$) e $F_R = 0,075$ (curva que atinge os menores valores de C_M/u_0); 0,10; 0,15; 0,20; 0,25 e 0,3 (curva que atinge os maiores valores de C_M/u_0).

3.6 Curvas de remanso

Um resultado complementar que pode ser extraído da solução obtida no segundo capítulo constitui-se no efeito que um aumento contínuo do período da maré fluvial pode causar. Pelo que foi averiguado até o momento, é possível inferir que os efeitos inerciais tornam-se menos importantes à medida que o período aumenta. Conseqüentemente, espera-se que, no caso limite, quando o período (T) aumente

indefinidamente, a solução do problema coincida com a sua versão permanente, ou seja, com a curva de remanso associada. Para investigar tal situação, será calculado o limite da solução para o nível de água quando a frequência tende a zero.

Seja:

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) = 1 + \varepsilon e^{f_r \hat{x}} \cos(f_i \hat{x} + \hat{t}) \quad (2.57)$$

Conforme estabelecido no capítulo II:

$$f = f_r + if_i \quad (2.27)$$

dessa forma, $\lim_{s \rightarrow 0} \hat{h}(\hat{x}, \hat{t})$ é determinado por

$$\lim_{s \rightarrow 0} f_r = \frac{3}{AM} \quad (3.22)$$

desde que $AM \neq 0$, e

$$\lim_{s \rightarrow 0} f_i = 0 \quad (3.23)$$

o que torna a função independente do tempo, como esperado, sendo ainda possível definir:

$$P = \frac{3}{AM} \quad (3.24)$$

Assim:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{h}(\hat{x}) = 1 \pm \varepsilon e^{P\hat{x}} \quad (3.25)$$

A equação 3.25 representa as curvas de remanso que ocorrem nos escoamentos permanentes gradualmente variados em canais, sendo que o sinal “+” indica uma curva do tipo $M_{1,}$ relativa a um canal de fraca declividade sujeito a um escoamento subcrítico, e cuja declividade da superfície da água é positiva. Por outro lado, o sinal “-” indica uma curva do tipo $M_{2,}$ a qual se diferencia da anterior devido à superfície da água apresentar declividade negativa.

A solução dada por 3.25 é idêntica à solução do problema no caso permanente (a.15), calculada no apêndice. Entretanto, cabe investigar a relação entre os valores mínimos e máximos atingidos pelo nível de água na solução não permanente (2.57), os chamados envelopes de nível de água e as curvas de remanso dadas por 3.25.

Voltando à equação 2.57, observa-se que $\hat{h}(\hat{x}, \hat{t})$ atinge valores maiores ou menores, dependendo da variação de $\cos(f_i \hat{x} + \hat{t})$.

Como:

$$-1 \leq \cos(f_i \hat{x} + \hat{t}) \leq 1$$

obtêm-se os envelopes de nível a partir de 2.57, fazendo $\cos(f_i \hat{x} + \hat{t}) = -1$ e $\cos(f_i \hat{x} + \hat{t}) = 1$.

Assim a equação que representa os envelopes é dada por:

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) = 1 \pm \epsilon e^{f_r \hat{x}} \quad (3.26)$$

Para confirmar a conclusão, é possível observar os envelopes de nível e as curvas de remanso grafados conjuntamente.

Mesmo que o foco em estudo nesta seção seja o que acontece para valores de T na faixa de domínio das forças de atrito, é interessante observar que mesmo nessa faixa de valores não aconteceu discrepância significativa.

Na Figura 16, foi utilizado um valor de $T = 0,5h$, característico de uma faixa, na qual as forças de inércia predominam.

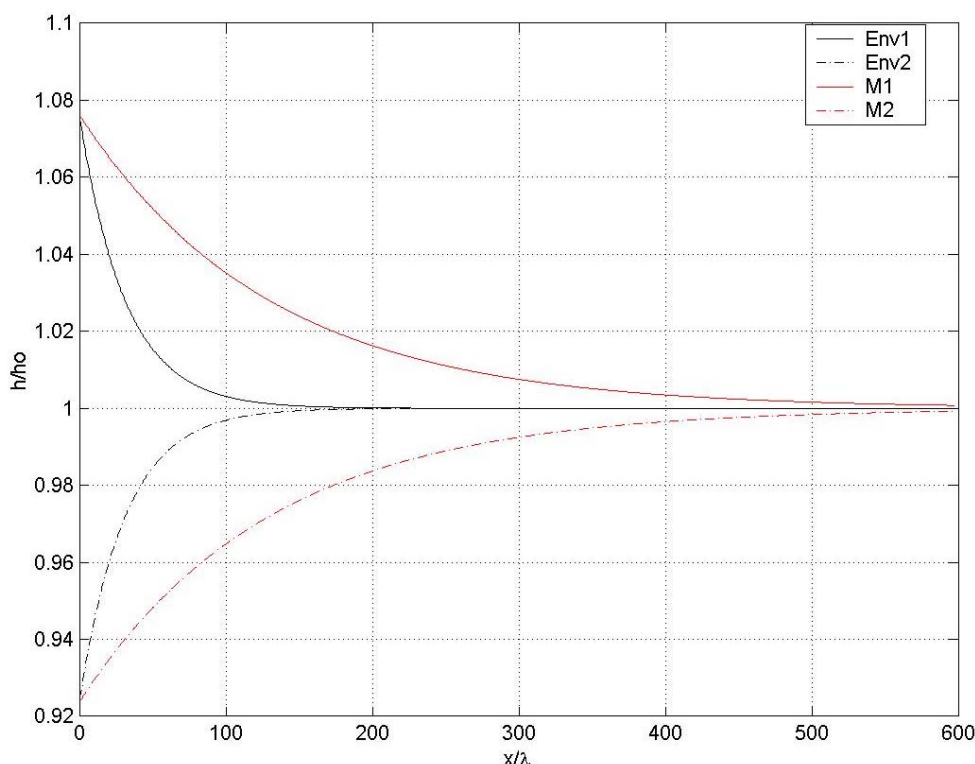


Figura 16: Relaciona as curvas de remanso M_1 e M_2 (curvas mais externas) com os envelopes de nível de água para $T = 0,5h$.

Considerando, pois, $T = 12,42h$, portanto um valor característico da faixa onde existe o predomínio das forças de atrito, nota-se, como esperado, que houve melhora significativa em termos de ajustamento das curvas, conforme mostra a Figura 17.

Então, o uso da curva de remanso como indicativo da distância de penetração, como também da variação do nível acaba apresentando resultados compatíveis tanto no regime de atrito quanto no regime de inércia

Conforme o exposto, o autor entende que as curvas de remanso M_1 e M_2 demonstram uma aproximação relevante para os envelopes de nível de água.

Fica manifesto também que se deve considerar o grau de acuidade desejado na solução.

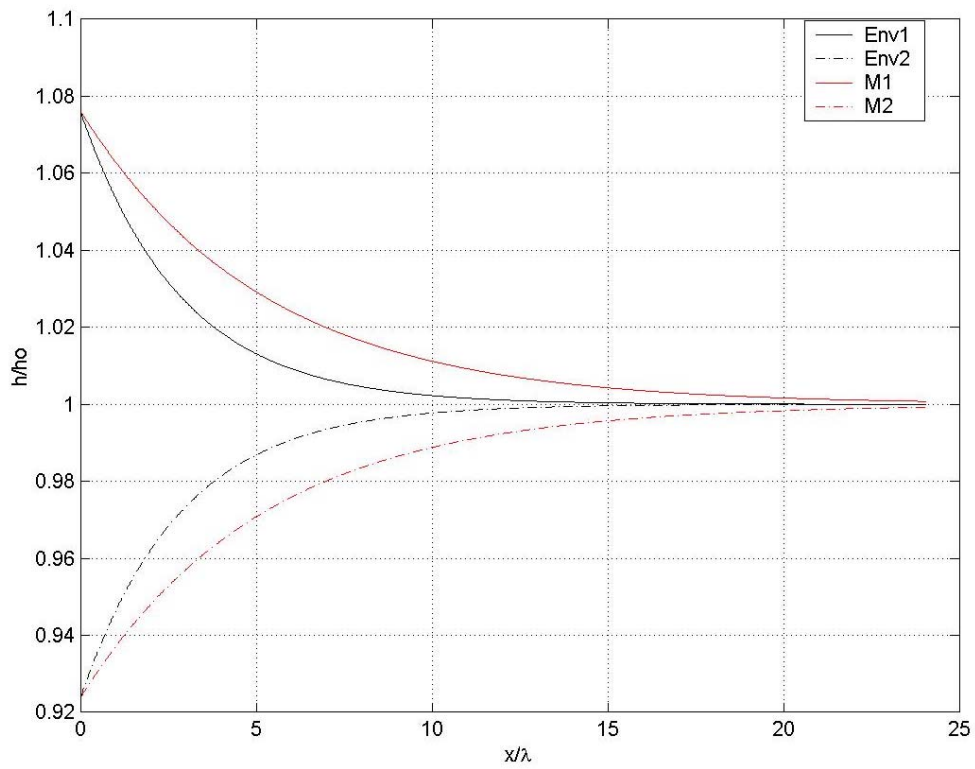


Figura 17: Relaciona as curvas de remanso M_1 e M_2 (curvas mais externas) com os envelopes de nível de água para $T=12,42h$.

Por fim, tomando $T = 48$ h, observa-se, na Figura 18, que a diferença entre os envelopes e as curvas de remanso tende a diminuir drasticamente à medida que T cresce indefinidamente, como indica a equação 3.25 se comparada à 3.26.

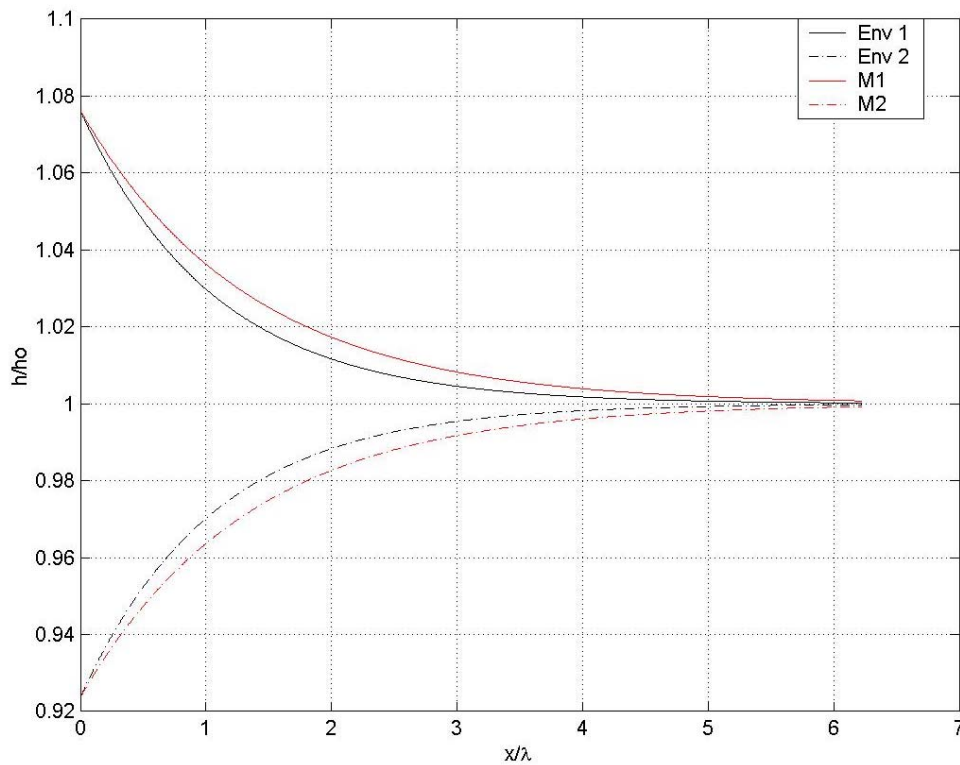


Figura 18: Relaciona as curvas de remanso M_1 e M_2 (curvas mais externas) com os envelopes de nível de água para $T = 48$ h.

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES

No trabalho que ora se encerra, foi analisado o fenômeno da maré fluvial em um canal de geometria simplificada, através da solução das equações de Saint-Venant para o caso no qual a maré de pequena amplitude perturba o escoamento básico, permanente, uniforme e subcrítico.

A dedução das equações de Saint-Venant foi formulada segundo a ótica da Mecânica dos Fluidos, objetivando suprir uma lacuna existente na literatura da área de hidráulica de canais no país.

Ao desenvolver uma solução adimensional das equações de Saint-Venant na forma unidimensional (1-D), procurou-se apresentar o problema sob o ponto de vista do comportamento da onda de maré, evidenciando a relação existente entre a variação do seu período e do número adimensional M , com sua atenuação. Mostrou-se, também, que a solução depende, além de M , de outros dois parâmetros adimensionais: ε e F_R . Conclui-se, em decorrência, que o aumento no período acaba propiciando um aumento relativo nas forças de atrito do escoamento – o que, por sua vez, faz a onda se atenuar mais rapidamente, em relação ao seu comprimento.

Constatou-se, ainda, que a velocidade da onda de maré, quando confrontada com a velocidade básica do canal e com a velocidade de uma onda de gravidade, em um regime de escoamento subcrítico, acaba situando-se em uma faixa cujos limites inferior e superior são, respectivamente, a velocidade básica do canal e a velocidade da onda de gravidade.

Verificou-se, também, que o caso limite da maré fluvial, com período infinitamente longo, coincide com a solução permanente, conhecida em hidrologia como curva de remanso. Para valores de período na faixa de 0,1 a 48 horas, os quais correspondem a um espectro bastante amplo de fenômenos, concluiu-se que a curva de remanso não superestimou o nível máximo atingido pela água, no interior do canal, sob efeito da maré. Ressalta-se, então, para o caso ser imprescindível considerar o grau de acuidade que se deseja na solução.

Este trabalho, fruto de uma linha de pesquisa existente no Lahimar, aborda o assunto **Marés Fluviais**. Atualmente, encontra-se em curso, no referido laboratório, o estudo dos efeitos de segunda ordem na solução do problema. Estima-se

que acabem por produzir uma sobrelevação no nível médio do rio ou canal, assim como determinem uma forma assimétrica à onda de maré.

Sabe-se que a equipe de pesquisadores do Lahimar busca aperfeiçoar os métodos matemáticos para o estudo desse fenômeno, o que permitirá, em breve, a modelação de casos reais, como o da maré no rio Itajaí, em Santa Catarina. Todavia, a inexistência de dados de campo, tais como nível e vazão do rio, apresenta-se como um desafio para o avanço das pesquisas nessa área. Esforços estão sendo envidados pela equipe do Lahimar no sentido de obter os dados precedentes, o que permitirá em breve a calibração e validação do modelo.

Em virtude das constatações arroladas, este estudo alia-se aos esforços empreendidos no Lahimar, no sentido de estabelecer-se como referencial teórico, desenvolvendo de forma adimensional, uma solução para o fenômeno da **Maré Fluvial** correta até primeira ordem. Dessa forma se estabelece com passo basilar de caráter geral que favoreça estudos posteriores de segunda ordem, tendo em vista aproximar-se cada vez mais do fenômeno real. Efetiva-se, assim, a interação da Linguagem Matemática para a decodificação de Fenômenos da Natureza.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DEAN, R. G.; DALRYMPLE, R. A. - *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*, Prentice Hall, Inc., 1984, 353 p.

FRENCH, R.H. - *Open Channel Hydraulics*, Mc Graw-Hill, New York, 1986, 705 p.

GODIN, G. - The Propagation of Tides up Rivers with Special Considerations on the Upper Saint-Lawrence River, *Estuarine Coastal and Shelf Science* 48: p.307-324, 1999.

GODIN, G. - Modification of River Tides by the Discharge, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, v.111, n.2, p. 257-274, March, 1985.

GODIN, G. - The Tide in Rivers, *International Hydrographic Review*, Monaco, LXI 2, p. 159-170, 1984.

JANSEN, P.Ph. - *Principles of River Engineering: The non-tidal alluvial river*, Pintman Publ.Ltd., London, 1979, 485 p.

JORDEN, V. - *Investigações Sobre a Influência da Maré em Canais Fluviais*. Tese de mestrado, Prog. Eng. Ambiental, UFSC, Florianópolis, 1998, 52 p.

KUNDU, K. Pijush. - *Fluid Mechanics*, Academic Press, Inc., San Diego, 1990, 638 p.

MELO F^o E. - Marés Fluviais. Parte 1: Teoria, *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v.7, n.4, p. 135-145, 2002.

MELO F^o E. - Marés Fluviais. Parte 2: Aplicações, *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v.7, n.4, p. 147-165, 2002.

MELO F^o E.; JORDEN, V. - Tide Penetration in Coastal Rivers, Proc. of the COPEDEC V, Cape Town, South Africa, v.3, p.1771-1781, 1999.

MELO F^o E. - Considerações Sobre a Hidráulica de Canais Fluviais e de Canais de Maré, *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v.3, n.2, p. 95 -107, 1998.

MELO PORTO, R. - *Hidráulica Básica*, EESC-USP, 1998, 519 p.

MORRIS, E. M. - The Effect of the Small-Slope Approximation and Lower Boundary Conditions on Solutions of the Saint-Venant Equations, *Journal of Hydrology*, v.40, p. 31- 47, 1979.

STOKER, J.J. – *Water Waves:The Mathematical Theory with Applications*, Interscience Publishers LTD. London, 1957, 565 p.

TAYFUR, G. - KAVVAS, M. L.; GOVINDARAJU, R. S. & STORM, D. - Applicability of Saint-Venant Equations for two-dimensional Overland Flows over Rough Infiltrating Surfaces, *Journal of Hydraulic Engineering*, v. 119, n. 1, p. 51-63, 1993.

VONGVISENSSONJAI, S.; ROJANAKAMTHORN, S. – Interaction of Tide and River Flow, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, v.115, n.1, p. 86-104, 1989.

APÊNDICE

SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA CURVAS DE REMANSO M_1 E M_2 A PARTIR DAS EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT PERMANENTES

A título de elucidação, apresenta-se, a seguir, uma maneira alternativa de obter as curvas de remanso dadas pela equação 3.25.

O ponto de partida é a versão permanente das equações 2.5 e 2.6.

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{h} \hat{u}) = 0 \quad (\text{a.1})$$

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} = \frac{g}{u_o s} S_o - F_R^{-2} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} - M^{-1} \frac{\hat{u}^2}{\hat{h}} \quad (\text{a.2})$$

sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$\hat{\eta}_1(0) = \pm 1$$

$$\lim_{\hat{x} \rightarrow -\infty} \hat{\eta}(\hat{x}) = 0$$

Considere-se que a altura de água $\hat{h}(\hat{x})$ e a velocidade da corrente $\hat{u}(\hat{x})$ do rio sob o efeito da maré possam ser escritas na forma:

$$\hat{h}(\hat{x}) = 1 + \varepsilon \hat{\eta}_1(\hat{x}) + O(\varepsilon^2) \quad (\text{a.3})$$

$$\hat{u}(\hat{x}) = 1 + \varepsilon \hat{u}_1(\hat{x}) + O(\varepsilon^2) \quad (\text{a.4})$$

Substituindo a.3 e a.4 em a.1 e a.2, advém que:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} \right) = O(\varepsilon^2) \quad (\text{a.5})$$

$$\varepsilon \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} \right) = g \frac{S_o}{u_o s} - M^{-1} + \varepsilon \left(\hat{\eta}_1 M^{-1} - 2\hat{u}_1 M^{-1} - F_R^{-2} \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (\text{a.6})$$

sendo utilizada a expansão binomial $(1 + \varepsilon \hat{\eta}_1)^{-1} = 1 - \varepsilon \hat{\eta}_1 + (\varepsilon \hat{\eta}_1)^2$, desde que $|\varepsilon \hat{\eta}_1| < 1$

A equação a.6, em ordem $O(0)$, confirma que o escoamento básico do rio é dado por:

$$M^{-1} = \frac{g S_o}{u_o s} \quad (\text{a.7})$$

ou seja:

$$u_o = \frac{q}{h_o} \quad (\text{a.8})$$

sendo igual à equação 2.3.

Por outro lado, considerando os termos de primeira ordem, no sistema de equações a.5 e a.6, decorre que:

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (\text{a.9})$$

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} = \hat{\eta}_1 M^{-1} - 2\hat{u}_1 M^{-1} - F_R^{-2} \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} \quad (\text{a.10})$$

Resolvendo o sistema de equações a.9-a.10, obtêm-se

$$\hat{\eta}_1(\hat{x}) = A_1 e^{p\hat{x}} + A_2 \quad (\text{a.11})$$

$$\hat{u}_1(\hat{x}) = B_1 + B_2 \hat{\eta}_1(x) \quad (\text{a.12})$$

Porém, considerando as condições de contorno definidas acima, resulta:

$$\eta_1(\hat{x}) = \pm e^{p\hat{x}} \quad (\text{a.13})$$

$$\hat{u}_1(\hat{x}) = -\hat{\eta}_1(\hat{x}) \quad (\text{a.14})$$

Então, substituindo a.13 em a.3, resulta:

$$\hat{h}(\hat{x}) = 1 \pm \varepsilon e^{p\hat{x}} \quad (\text{a.15})$$

E substituindo a.14 em a.4, resulta:

$$\hat{u}(\hat{x}) = 1 - \varepsilon \hat{\eta}_1(\hat{x}) \quad (\text{a.16})$$